Solitons on Non-Commutative Spaces (Theory of integrable systems and related topics : State of arts and perspectives)

数理解析研究所講究録 1400 巻 2004 年 88-126

Solitons on Non-Commutative Spaces

東京大学大学院 総合文化研究科 相関基礎科学系物理
(Institute of Physics, University of Tokyo, Komaba)

浜中 真志
(HAMANAKA, Masashi) [1]

概要

非可換空間上の (Non-Commutative = NC) 場の理論の研究はここ数年, 素粒子論, 弦理論の一つの主流となり爆発的進展を遂げた. 特に非可換空間上のソリトン (非可換ソリトン) は弦理論の解析にも非常に有用であり, 様々な応用をもたらした. この記事では, 非可換ソリトンの可積分な性質に焦点をあてて, 非可換インスタントン, 非可換モノポールの厳密解を詳しく調べ, 今後の課題と展望—特に Ward 予想や佐藤理論の非可換化プログラム—について議論する.

1 Introduction

場の理論の非可換空間への拡張は, 単なる一般化ではなく, 物理としても数理物理としても非常に面白いものを含んでいる. 非可換空間を考える動機は, もちろん人それぞれであるが, 一般には次の 2 つに大別される：

- 重力の量子論の定式化
- 磁場中の物理の解明

前者の動機は大体次の通りである. 重力の古典論はリーマン幾何学によって美しく定式化され, 重力場は計量によって表される. 理論の量子化は, 場に非可換性を導入することになるので, 素朴に重力を量子化すると, 計量が非可換性を持つと考えられる. その基礎を成す幾何というのは非可換幾何ではなかろうか, すなわち, 重力の量子論は非可換空間を考えることで美しく定式化されるのではないか, といったところである. 実際, 重力の量子論の最有力候補と言われている弦理論には, 時空の非可換性がしばしば深遠な形で現れる [85].

後者の動機は, 磁場中のゲージ理論が非可換空間上のゲージ理論 (NC ゲージ理論)[2] と等価であるという事実に基づくものである. これは磁場中の電子系などの現実のモデルで古くから知られており [95], 量子ホール効果への応用も盛んであった. (例えば [8, 27, 76].)[3] この等価性が

---

[1] E-mail: hamanaka@hep1.c.u-tokyo.ac.jp; Home Page: http://www2.yukawa.kyoto-u.ac.jp/~hamanaka

[2] 「非可換ゲージ理論」と書くと, ゲージ群が Non-abelian (非可換) なゲージ理論と紛らわしいので, このように表すことにする.

[3] 最近, 分数量子ホール効果への応用が再び活発に議論されていた. (例えば [129, 120].)

弦理論の枠組みでも成り立つことが, 最近 Seiberg&Witten[4] [125] 等により明らかにされ, 非可換理論の爆発的流行が始まった. この枠組みでは, 非可換ソリトンは D-brane そのものに対応し, D-brane の解析が非可換ソリトンの解析から行えるようになった. 後者の解析の方が, 時に取り扱いが非常に容易になるため, 様々な応用が可能になったのである.

非可換空間上の場の理論の重要な特徴としては

- 特異点の解消

が挙げられる. 以下で直観的にこれを説明しよう.

非可換空間は座標関数同士の積の非可換性で特徴付けられる：

$$[x^i, x^j] = i\theta^{ij}. \tag{1.1}$$

ここで, θ^{ij} は反対称な実定数であり, 非可換パラメータと呼ばれる[5]. この関係式は, 量子力学の正準交換関係

$$[q, p] = i\hbar \tag{1.2}$$

に類似しており, 「空間の不確定性関係」を導く. このことから非可換空間上では, 粒子の位置は完全に決めることができず, ある広がった分布を持つ. その結果, 可換な空間上では存在した場の特異点が, 非可換空間上では解消されるということが起こりうる. 分布の広がりの幅は大体 $\sqrt{|\theta^{ij}|}$ に比例し, 可換な空間への極限 $\theta^{ij} \to 0$ で特異性が復活する.

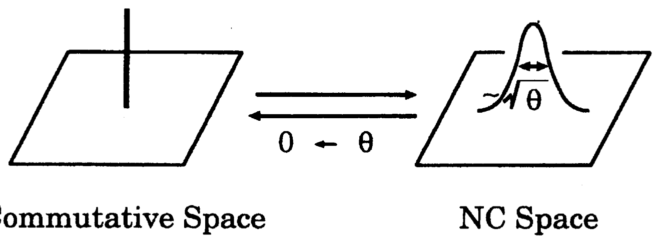

図 1: 特異点の解消

非可換ソリトンにおいても, 特異点解消が一般に起こり, 可換な場合には見られない面白い結果を生み出す. 例えば, 非可換インスタントンでは, (完備化された) インスタントン・モジュライ空間の特異点が一般に解消し [111, 112], 特異でない $U(1)$ インスタントン解を具体的に構成することができる [114].[6]

また, 特異な場の配位は内部構造を持たずシンプルではあるが, 普通には取り扱えないため可換空間では解析の対象から除外される. これが非可換空間では可能になり, 容易な取り扱いから

[4]なお, Seiberg-Witten 理論として有名な, $\mathcal{N} = 2$ 超対称ゲージ理論の厳密解の話とは無関係.

[5]非可換パラメータ θ^{ij} は背景磁場に関係し, 手で与えられる.

[6][114] で構成された解は特異ゲージをとった場合の解に相当し, (ごく一部分だけ) 悪い振る舞いをする. そのことを指摘し, 至るところ非特異な解の構成法を提唱したのが古内氏 [31, 32] である.

様々な応用がもたらされるのである. Gopakumar-Minwalla-Strominger (GMS) ソリトンと呼ばれるもの [36] は, その最初の例である.[7]

この記事では, NC ゲージ理論の基礎を概説したあと, 非可換インスタントン, 非可換モノポールの構成を ADHM 構成法, Nahm 構成法により具体的に行う. 非可換にしたことで生じた特異点解消とそれに伴う新しい物理的対象について詳しく議論する. 最後に, 全ソリトン理論の非可換化という進展中のプログラムについても触れる.

2 NC(=Non-Commutative) Gauge Theories

NC ゲージ理論の記述には主に 2 つの方法があり, 磁場中の可換な記述と合わせて合計次の 3 つの方法がある. これらは,「非可換 Euclid 空間」上では, Weyl 変換および Seiberg-Witten マップによって 1 対 1 に対応づけられる：

$\boxed{\text{(i) スター積を用いる記述}}$ $\left(\xrightarrow{\theta^{ij}\to 0} \boxed{\text{普通の可換空間上の理論}} \right)$

⟨ 非可換側 ⟩ ↑ Weyl 変換 ↓

$\boxed{\text{(ii) オペレーター形式の記述}}$

↑ Seiberg-Witten マップ ↓

⟨ 可換側 ⟩ $\boxed{\text{(iii) 背景一様}\ B\ \text{場 (=磁場) 中の DBI 作用による記述}}$

Seiberg と Witten が明らかにしたのは (i) と (iii) の等価性である. この節ではまずスター積を用いる記述 (i) によって NC ゲージ理論を定義し, それから Weyl 変換という変換を用いてオペレーター形式の記述 (ii) に移る. 取り扱いが容易な記述 (ii) で厳密解を求め, 様々な視点から解釈を与える.

この記事では, NC $G = U(N)$ 4 次元 Yang-Mills 理論と NC $G = U(N)$ $(3+1)$ 次元[8] Yang-Mills-Higgs 理論を具体例として議論を進める. まず可換空間上の理論を紹介する.

<u>$G = U(N)$ 4 次元 Yang-Mills 理論</u>

$G = U(N)$ 4 次元 Yang-Mills 理論の作用は

$$I_{\rm YM} = -\frac{1}{2g_{\rm YM}^2}\int d^4x \ {\rm Tr}\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \tag{2.1}$$

---

[7]非可換空間上では Derrick の定理 [18] ([38, 69] にも解説あり) が成り立たないため, 様々なソリトンが存在し得るであろう, というのが動機の一つでもあった.

[8]$(3+1)$ 次元とは空間 3 次元 (座標：x^1, x^2, x^3), 時間 1 次元 (座標：x^0) という意味である.

である．ただし，$F_{\mu\nu} := \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]$, $D_\mu := \partial_\mu + A_\mu$, $\mu, \nu = 1,2,3,4$ である．運動方程式,[9] BPS 方程式[10]はそれぞれ次式のようになる：

- 運動方程式 (Yang-Mills 方程式)

$$[D^\nu, [D_\nu, D_\mu]] = 0, \quad \left(\Leftrightarrow \quad \frac{\delta I_{\rm YM}}{\delta A^\mu} = 0\right) \tag{2.2}$$

- BPS 方程式 ((Anti-)Self-Dual 方程式)

$$F_{\mu\nu} \mp *F_{\mu\nu} = 0. \tag{2.3}$$

ここで，$*$ は Hodge 双対作用素である ($*F_{\mu\nu} := (1/2)\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma}$)．複号は上段が Self-Dual (SD), 下段が Anti-Self-Dual (ASD) の場合を表す (以後同様)．インスタントンは 4 次元 Euclid 空間上の Yang-Mills 理論の運動方程式の，有限作用を与える安定解として定義される．

BPS 方程式は作用 I を停留させるものとして次のように導かれた：

$$\begin{aligned} I_{\rm YM} &= -\frac{1}{4g_{\rm YM}^2}\int d^4x \ {\rm Tr}\ (F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + *F_{\mu\nu} * F^{\mu\nu}) \\ &= -\frac{1}{4g_{\rm YM}^2}\int d^4x \ {\rm Tr}\,[(\underbrace{F_{\mu\nu} \mp *F_{\mu\nu}}_{=0\ \Leftrightarrow\ {\rm BPS}})^2 \pm 2F_{\mu\nu} * F^{\mu\nu}]. \end{aligned} \tag{2.4}$$

2 行目の第 2 項はインスタントン数 (位相的不変量) に対応し，場の連続変形で不変に保たれる．したがって 2 行目第 1 項の平方完成部分から作用の極小条件が導かれるのである．

なお ASD 方程式は次のように複素表示に書ける：

$$F_{z_1\bar{z}_1} + F_{z_2\bar{z}_2} = 0, \quad F_{z_1z_2} = 0. \tag{2.5}$$

$G = U(N)$ $(3+1)$ 次元 Yang-Mills-Higgs 理論

モノポール[11] は $(3+1)$ 次元時空上の Yang-Mills-Higgs 理論の BPS ソリトンとして現れ，特に $G = U(1)$ の場合のものを Dirac モノポールという．

作用 $I_{\rm YMH}$ は次の通り：[12]

$$I_{\rm YMH} = -\frac{1}{4g_{\rm YM}^2}\int d^4x \ {\rm Tr}\ (F_{mn}F^{mn} + 2D_m\Phi D^m\Phi)\,. \tag{2.6}$$

ここで，Φ はゲージ群 G の随伴表現に属する Higgs 場であり，$d^4x := dx^0dx^1dx^2dx^3$, $m, n = 0,1,2,3$ である．運動方程式, BPS 方程式は次のようになる：

[9] 作用の停留点を与える場の配位の満たす方程式，すなわち $\delta I/\delta \mathcal{O} = 0$ ($\mathcal{O}$ はラグランジアンに含まれる場) のことであり，古典的運動を記述する．運動方程式の解には不安定な (non-BPS な) 解も含まれる．

[10] 作用の極小を与える静的な場の配位の満たす方程式のことであり，静止した安定な系を記述する．一般に BPS 方程式の解は常に運動方程式の解になる．なお，BPS は Bogomol'nyi, Prasad, Sommerfield の 3 人の頭文字をとったもの．

[11] この記事で扱うモノポールは全て BPS モノポールなので，"BPS" は一切省略している．

[12] ポテンシャル項は省略した．

- 運動方程式 (Yang-Mills-Higgs 方程式)

$$
\begin{aligned}
&[D^n,[D_n,D_m]]+[\Phi,[\Phi,D_m]]=0, && \left(\Leftrightarrow \quad \frac{\delta I_{\mathrm{YMH}}}{\delta A^m}=0\right)\\
&[D^m,[D_m,\Phi]]=0. && \left(\Leftrightarrow \quad \frac{\delta I_{\mathrm{YMH}}}{\delta \Phi}=0\right)
\end{aligned} \tag{2.7}
$$

- BPS 方程式 (Bogomol'nyi 方程式)

$$
B_i=\pm[D_i,\Phi]. \tag{2.8}
$$

ここで, $B_i:=-(i/2)\epsilon_{ijk}F^{jk}$ $(i,j,k=1,2,3)$ は磁場である. BPS 方程式はエネルギー E の下限を満たすものとして次のように導かれた：

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2g_{\mathrm{YM}}^2}\int d^3x \ \mathrm{Tr}\left[\frac{1}{2}F_{ij}F^{ij}+D_i\Phi D^i\Phi\right]\\
&= \frac{1}{2g_{\mathrm{YM}}^2}\int d^3x \ \mathrm{Tr}\,[\underbrace{(B_i\mp D_i\Phi)}_{=0\ \Leftrightarrow\ \mathrm{BPS}}{}^2\pm\partial_i(\epsilon_{ijk}F^{jk}\Phi)].
\end{aligned} \tag{2.9}
$$

2行目の第2項は磁荷 (位相的不変量) に対応し, 場の連続変形で不変に保たれる. したがって2行目第1項の平方完成部分から作用の極小条件が導かれるのである.

Bogomol'nyi 方程式も次のように複素表示に書ける：

$$
B_3=\pm[D_3,\Phi],\quad B_z=\pm[D_z,\Phi] \tag{2.10}
$$

ただし $\hat{D}_z:=(1/2)(\hat{D}_1-i\hat{D}_2)$, $\hat{B}_z:=(1/2)(\hat{B}_1-i\hat{B}_2)$.

(i) スター積を用いる記述 (変形量子化 [90, 13] による定式化)

スター積は普通の可換な関数 (場) に対して定義される積の一つである[13]：

$$
\begin{aligned}
f\star g(x) &:= \exp\left(\frac{i}{2}\theta^{ij}\partial_i^{(x')}\partial_j^{(x'')}\right)f(x')g(x'')\Big|_{x'=x''=x}\\
&= f(x)g(x)+\frac{i}{2}\theta^{ij}\partial_i f(x)\partial_j g(x)+\mathcal{O}(\theta^2)
\end{aligned} \tag{2.11}
$$

スター積は次の重要な性質を持つ：

- 結合則が成り立つ：$f\star(g\star h)=(f\star g)\star h$
- 座標関数同士の非可換性 (1.1) を再現：$[x^i,x^j]_\star:=x^i\star x^j-x^j\star x^i=i\theta^{ij}$
- $\theta^{ij}\to 0$ で普通の積に戻る.

[13]正確にはスター積はもっと一般的に定義されるものであるが [101], ここでは「非可換 Euclid 空間」のみを扱うので, このような具体的表式 (Moyal 積 [110] と呼ばれる) で表した.

NCゲージ理論は, 普通の可換空間上のゲージ理論に現れる場同士の積を全てスター積に置き換えることで得られる.[14] したがって, NC $G = U(N)$ Yang-Mills(-Higgs) 理論の作用, 運動方程式, および BPS 方程式は, 式 (2.1), (2.2), (2.3), (2.6), (2.7), (2.8) において場同士の積が全てスター積に置き換わったものに等しい. 作用に無限個の微分が入っているが[15], 場は普通の可換な関数なので, 運動方程式, BPS 方程式を導出するには, 可換な場合と同じ手順を踏めばよいのである. なおゲージ群は普通 $U(N)$ で考える[16].

その他いくつかの重要な性質を列挙する.

新しい変数 $z := x + vt, \bar{z} := x - vt$ で式 (2.11) を書き換えると

$$f(z,\bar{z}) \star g(z,\bar{z}) = e^{iv\theta(\partial_{\bar{z}'}\partial_{z''} - \partial_{z'}\partial_{\bar{z}''})} f(z',\bar{z}')g(z'',\bar{z}'')\Big|_{\substack{z'=z''=z \\ \bar{z}'=\bar{z}''=\bar{z},}} \tag{2.12}$$

となる. したがって,

$$f(z) \star g(z) = f(z)g(z), \quad f(\bar{z}) \star g(\bar{z}) = f(\bar{z})g(\bar{z}). \tag{2.13}$$

また,

$$\int d^D x f(x) \star g(x) = \int d^D x f(x) g(x), \tag{2.14}$$

ただし積分は全ての非可換方向について実行した. これにより非可換の場合も, BPS 方程式の導出の平方完成部分から作用停留の条件が導かれるのである.[17]

(ii) オペレーター形式の記述 (Connes 流 [16] の定式化)

今度は, 座標の非可換性 (1.1) から出発して NC ゲージ理論を定義する. 簡単のため非可換 2 次元平面 ($[x^1, x^2] = i\theta$) を考える. 新しい変数を $\hat{a} := (1/\sqrt{2\theta})\hat{z}$, $\hat{a}^\dagger := (1/\sqrt{2\theta})\hat{\bar{z}}$ (ただし $\hat{z} := \hat{x}^1 + i\hat{x}^2$) として定義すると, $[\hat{x}^1, \hat{x}^2] = i\theta$ より,

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 \tag{2.15}$$

が分かる. これより, $\hat{a}^\dagger, \hat{a}$ はそれぞれ調和振動子の生成, 消滅演算子と解釈できる. これらが作用する Fock 空間を $\mathcal{H}$ と書くと, $\mathcal{H} = \oplus_{n=0}^{\infty} \mathbf{C}|n\rangle$ である. ここで, $|n\rangle := \left\{(\hat{a}^\dagger)^n/\sqrt{n!}\right\}|0\rangle$, $(n = 0, 1, \ldots)$ は占有数表示の基底であり, $\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle = n|n\rangle, \hat{a}|0\rangle = 0$ を満たす.

[14] スター積に置き換える際, 非線型項の順序がまず問題となるが, ゲージ理論の場合はゲージ不変な表式をそのまま非可換化すればよい. これで無限次元のゲージ群作用について不変な理論が得られる. ただしゲージ群が $U(1)$ であってもゲージ場の交換子部分 $[A_\mu, A_\nu]$ を残して非可換化しなければならない.

[15] このため非可換空間上の場の理論は, 一般に非局所性を持ち, またパリティを破るが (非可換パラメータ θ^{ij} の存在があらわにローレンツ対称性を破っていることからも分かる), 一様磁場中の物理系と等価であり, 意味のない理論というわけではない. むしろ一様磁場中の物理の解明に役立つものと期待している. なおこのような場の理論的側面の総合報告として [26, 130] がある.

[16] 積がスター積なので $g_1, g_2 \in G$ であったとしても, $g_1 \star g_2 \in G$ とは限らない. 例えば $G = SU(N)$ だと行列式が 1 という条件からはみ出してしまう.

[17] 位相不変量の部分は表面積分になるので可換空間と同様に扱える. ($\partial_i \sim \mathcal{O}(r^{-1})$ より無限遠ではスター積は普通の積に戻ると考えられる.)

場 $\hat{f}$ は $\hat{x}$ の関数であるから, Fock 空間 $\mathcal{H}$ に作用する演算子となり, 占有数表示で以下のように表される：

$$\hat{f}(\hat{x}^1, \hat{x}^2) = \sum_{m,n=0}^{\infty} f_{mn}|m\rangle\langle n|. \tag{2.16}$$

特に場が x^1-x^2 平面での回転対称性を持つ場合 (すなわち $(\hat{x}^1)^2 + (\hat{x}^2)^2 \sim \hat{a}^\dagger\hat{a}$ と可換な場合),

$$\hat{f}(n, x^3) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n|n\rangle\langle n|. \tag{2.17}$$

のように対角行列となることが分かる[18].

微分は次のように定義される：

$$\partial_i \hat{f} := [\hat{\partial}_i, \hat{f}] := [-i(\theta^{-1})_{ij}\hat{x}^j, \hat{f}]. \tag{2.18}$$

これは実際 Leibniz 則と

$$\partial_i \hat{x}^j = [-i(\theta^{-1})_{ik}\hat{x}^k, \hat{x}^j] = \delta_i{}^j, \tag{2.19}$$

を満たす. 演算子 $\hat{\partial}_i = -i(\theta^{-1})_{ij}\hat{x}^j$ は微分演算子と呼ばれる. 積分も Fock 空間 $\mathcal{H}$ についてのトレースとして定義される：

$$\int dx^1 dx^2\ \hat{f}(\hat{x}^1, \hat{x}^2) \ := \ 2\pi\theta \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}} \hat{f}. \tag{2.20}$$

共変微分は, ゲージ群の基本表現に属する場 ϕ, 随伴表現に属する場 Φ に対してそれぞれ次のように与えられる：

$$\begin{aligned} D_i \hat{\Phi}^{\mathrm{adj.}} &:= [\hat{D}_i, \hat{\Phi}] := [\hat{\partial}_i + \hat{A}_i, \hat{\Phi}], \\ D_i \hat{\phi}^{\mathrm{fund.}} &:= [\hat{\partial}_i, \hat{\phi}] + \hat{A}_i \hat{\phi}. \end{aligned} \tag{2.21}$$

演算子 $\hat{D}_i = \hat{\partial}_i + \hat{A}_i$ は共変微分演算子と呼ばれる.

(i) と (ii) の等価性[19]

(i) と (ii) は「非可換 Euclid 空間」では等価な記述であり, Weyl 変換という変換によって対応づけられる. (i) の記述における場 $f(x^1, x^2)$ は, 次式で定義される Weyl 変換によって, (ii) の記述における場 $\hat{f}(\hat{x}^1, \hat{x}^2)$ にうつされる：

$$\hat{f}(\hat{x}^1, \hat{x}^2) \ := \ \frac{1}{(2\pi)^2}\int dk_1 dk_2\ \tilde{f}(k_1, k_2) e^{-i(k_1\hat{x}^1 + k_2\hat{x}^2)}. \tag{2.22}$$

ただし,

$$\tilde{f}(k_1, k_2) \ := \ \int dx^1 dx^2\ f(x^1, x^2) e^{i(k_1 x^1 + k_2 x^2)}. \tag{2.23}$$

[18] $|m\rangle\langle n|$ を Weyl 変換で記述 (ii) にうつして考えても理解できる (次ページ表参照).
[19] 詳しくは [57] などを参照.

場 $f(x^1,x^2)$ を一度 Fourier 変換したものを，そのまま逆 Fourier 変換する際，exp の肩の座標 x^1,x^2 をオペレーター $\hat{x}^1,\hat{x}^2$ に置き換えて変換したようなものである：

$$\begin{array}{ccc} & & f(x^1,x^2) \\ & \swarrow & \big| \\ \tilde{f}(k_1,k_2) & & \text{Weyl 変換} \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \hat{f}(\hat{x}^1,\hat{x}^2). \end{array}$$

Weyl 変換はスター積を行列の積にうつす：

$$\widehat{f\star g}=\hat{f}\cdot\hat{g}. \tag{2.24}$$

Weyl 変換の逆変換は直接には

$$f(x^1,x^2)=\int dk_2\ e^{-ik_2x^2}\Big\langle x^1+\frac{k_2}{2}\Big|\hat{f}(\hat{x}^1,\hat{x}^2)\Big|x^1-\frac{k_2}{2}\Big\rangle \tag{2.25}$$

と書ける．Weyl 変換により，場や掛け算だけでなく，微分，積分も 1 対 1 に対応し，(i) と (ii) の記述は等価になる．対応関係は以下の通り：

	(i) スター積を用いる記述	(ii) オペレーター形式の記述
場	普通の関数 $f(x^1,x^2)$	無限次元正方行列 $\hat{f}(\hat{x}^1,\hat{x}^2)=\sum_{m,n=0}^{\infty}f_{mn}\lvert m\rangle\langle n\rvert$
積 ($\widehat{f\star g}=\hat{f}\hat{g}$)	スター積 結合則：$f\star(g\star h)=(f\star g)\star h$	行列の積 結合則：$\hat{f}(\hat{g}\hat{h})=(\hat{f}\hat{g})\hat{h}$ (自明)
非可換性	$[x^i,x^j]_\star:=x^i\star x^j-x^j\star x^i=i\theta^{ij}$	$[\hat{x}^i,\hat{x}^j]=i\theta^{ij}$
微分	$\partial_i f\equiv[-i(\theta^{-1})_{ij}x^j,f]$ 特に $\partial_i x^j={\delta_i}^j$	$\partial_i\hat{f}:=[\underbrace{-i(\theta^{-1})_{ij}\hat{x}^j}_{=:\,\hat{\partial}_i},\hat{f}]$ 特に $\partial_i\hat{x}^j=-i(\theta^{-1})_{ik}[\hat{x}^k,\hat{x}^j]={\delta_i}^j$
積分	$\int dx^1dx^2\ f(x^1,x^2)$	$2\pi\theta\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}\hat{f}(\hat{x}^1,\hat{x}^2)$
曲率	$F_{ij}=\partial_iA_j-\partial_jA_i+[A_i,A_j]_\star$	$\hat{F}_{ij}=\partial_i\hat{A}_j-\partial_j\hat{A}_i+[\hat{A}_i,\hat{A}_j]$ $=[\hat{D}_i,\hat{D}_j]-i(\theta^{-1})_{ij}$ (ただし $\hat{D}_i:=\hat{\partial}_i+\hat{A}_i$)
(ii) の行列要素 $\big\vert$ $\left(\begin{array}{c}x^1\text{-}x^2\text{平面}\\ \text{で回転対称}\end{array}\right)$ $\downarrow$	$\sqrt{\frac{n!}{m!}}\left(2r^2/\theta\right)^{\frac{m-n}{2}}e^{i(m-n)\varphi}\times$ $2(-1)^nL_n^{m-n}(2r^2/\theta)e^{-\frac{r^2}{\theta}}$ $\big\vert$ $\left(\begin{array}{c}\varphi\text{ に依らない}\\ \Leftrightarrow m=n\end{array}\right)$ $\downarrow$	$\lvert n\rangle\langle m\rvert$ $\big\vert$ $\left(\begin{array}{c}(\hat{x}^1)^2+(\hat{x}^2)^2\sim\hat{a}^\dagger\hat{a}\text{ と可換}\\ \Leftrightarrow m=n\end{array}\right)$ $\downarrow$
ある射影子	$2(-1)^nL_n(2r^2/\theta)e^{-\frac{r^2}{\theta}}$	$\lvert n\rangle\langle n\rvert$

ここで, (r,φ) は極座標, $L_n^\alpha(x)$ は次式で定義される Laguerre 多項式である：

$$L_n^\alpha(x) := \frac{x^{-\alpha}e^x}{n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n (e^{-x}x^{n+\alpha}). \tag{2.26}$$

(特に $L_n(x) := L_n^0(x)$.) なお, オペレーター形式の曲率の式で, $[\hat{D}_i,\hat{D}_j]$ と括ると, $[\hat{\partial}_i,\hat{\partial}_j](= i(\theta^{-1})_{ij})$ を相殺するための定数項 $-i(\theta^{-1})_{ij}$ が現れる.

これによりオペレーター形式の記述での BPS 方程式はそれぞれ次のように表される：

- ASD 方程式 (4 次元 Yang-Mills-Higgs 理論)

$$\begin{aligned}(-\hat{F}_{z_1\bar{z}_1}-\hat{F}_{z_2\bar{z}_2}=)\quad & [\hat{D}_{z_1},\hat{D}_{z_1}^\dagger]+[\hat{D}_{z_2},\hat{D}_{z_2}^\dagger]+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\theta_1}+\frac{1}{\theta_2}\right)=0,\\ (\hat{F}_{z_1z_2}=)\quad & [\hat{D}_{z_1},\hat{D}_{z_2}]=0.\end{aligned} \tag{2.27}$$

ただし, 非可換性は次のように取った：

$$\theta^{\mu\nu}=\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & \theta_1 & 0 & 0\\ -\theta_1 & 0 & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & \theta_2\\ 0 & 0 & -\theta_2 & 0\end{array}\right). \tag{2.28}$$

したがって非可換 4 次元空間上の場は非可換 2 次元平面上の場のテンソル積表現となり, 具体的に次のように表される：

$$\begin{aligned}\hat{f}(\hat{x}^\mu) &= \sum_{m_1,m_2,n_1,n_2=0}^{\infty} f_{m_1,m_2,n_1,n_2}|m_1\rangle\langle n_1|\otimes|m_2\rangle\langle n_2|\\ &=: \sum_{m_1,m_2,n_1,n_2=0}^{\infty} f_{m_1,m_2,n_1,n_2}|m_1,m_2\rangle\langle n_1,n_2|.\end{aligned} \tag{2.29}$$

ASD 方程式に定数項が含まれているのは, 上述の通りである.

- Bogomol'nyi 方程式 ((3 + 1) 次元 Yang-Mills-Higgs 理論)

$$\begin{aligned}(\hat{B}_3=)\quad 2[\hat{D}_z,\hat{D}_z^\dagger]+\frac{1}{\theta} &= \pm[\hat{D}_3,\hat{\Phi}],\\ (\hat{B}_z=)\quad [\hat{D}_3,\hat{D}_z] &= \pm[\hat{D}_z,\hat{\Phi}].\end{aligned} \tag{2.30}$$

$\hat{B}_3$ に定数項が含まれているのは, 上述の通りである. 非可換性は次のように空間座標 x^1,x^2 に導入した：[20]

$$[\hat{x}^1,\hat{x}^2]=i\theta,\quad (\theta>0),\quad \text{それ以外の座標同士：}\ [x^\mu,x^\nu]=0. \tag{2.31}$$

以後, 解の構成の議論は全てオペレーター形式の記述で行い, 解の性質を調べる際には, スター積を用いる記述に戻ることにする. この節では Fock 空間に作用する演算子にはハットを付けたが, 以後省略する. また, 以後 Self-Dual でなく, Anti-Self-Dual な場合を考える.

[20] 時間座標を非可換にすると時間微分が無限個入ってくる. そのため初期値問題の定義が困難となったり, さらに量子論では因果律やユニタリティが破れてしまったりと問題が生じる. したがって普通は空間座標のみを非可換にするが, 非可換パラメータの表す行列は反対称であり, そのランクは偶数であるから, 今の場合はこのように非可換性を導入するしかない.

3 ADHM/Nahm Construction of Exact BPS Solitons

ADHM/Nahm 構成法[21] とは, 任意のインスタントン解/モノポール解の非常に強力な構成法の一つであり, 様々な応用がある. これは, インスタントン/モノポールの解空間 (4 次元/3 次元自己双対方程式の解空間) と ADHM/Nahm 方程式の解空間との 1 対 1 対応 (双対性) を利用したものであり, それらの解空間どうしは「Dirac 方程式の零モード」を介して対応づけられる. 非可換インスタントン/モノポール解もこの方法で構成することができ, 既知の厳密解は (オペレーター形式では) 主にこの方法で求められた. (付録 A 参照.) ここではインスタントン, モノポールの ADHM/Nahm 構成法を具体的に行い, 解の性質や特異点の解消を詳しく議論する.

3.1 ADHM Construction of Instantons

ADHM 構成法から実際にさまざまなインスタントンの厳密解を求めることができる. 解の構成法は具体的には次の通りである.

- 手順 (i): ADHM 方程式

$$\begin{aligned}
(\mu_R :=) \quad & [B_1, B_1^\dagger] + [B_2, B_2^\dagger] + II^\dagger - J^\dagger J = -2(\theta_1 + \theta_2) =: \zeta, \\
(\mu_C :=) \quad & [B_1, B_2] + IJ = 0.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

  を解く. ここで, B_1, B_2 は $k \times k$ 行列, $I, J^\dagger$ は $k \times N$ 行列である. 右辺の定数は, 座標の交換子 $-[z_1, \bar{z}_1] - [z_2, \bar{z}_2]$ から生じたもので, 可換空間ではもちろんゼロである. 座標 z_i は ADHM データ B_i と常に対になって現れるため, このような座標の交換子が現れるのである.

- 手順 (ii): 「0 次元 Dirac 方程式」

$$\nabla^\dagger V := \begin{pmatrix} I & z_2 - B_2 & z_1 - B_1 \\ J^\dagger & -(\bar{z}_1 - B_1^\dagger) & \bar{z}_2 - B_2^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0. \tag{3.2}$$

  を規格化条件 $V^\dagger V = 1$ の下, 解く.

- 手順 (iii): 「0 次元 Dirac 方程式」(3.2) の規格化可能解 (零モード) V を用いて, ゲージ場を $A_\mu = V^\dagger \partial_\mu V$ として構成する. これは自動的に ASD 方程式を満たす.

非可換空間上での自己双対方程式 (2.27) と見比べれば, ADHM 方程式と自己双対方程式とで美しく対応していることが良く分かる.

ここで, インスタントン・モジュライ空間 $\mathcal{M}$ についてコメントする. インスタントン・モジュライ空間 $\mathcal{M}$ は, ADHM 方程式の右辺の定数値によって決まる. ($\mathcal{M} = \mathcal{M}_\zeta$.) ADHM 方程式

[21] 包括的レヴューとして [48, 23] がある.

(3.1) の第1式の右辺の定数ζがノンゼロであれば[22], (完備化された) インスタントン・モジュライ空間の特異点が解消することが知られている [111, 112]. したがって解消された特異点の部分に対応する, 可換空間にはないインスタントン解が存在することになる. これが $U(1)$ インスタントンであり[23], 実際に非可換 $\mathbf{R}^4$ 上で非特異な解として構成された [114, 31].

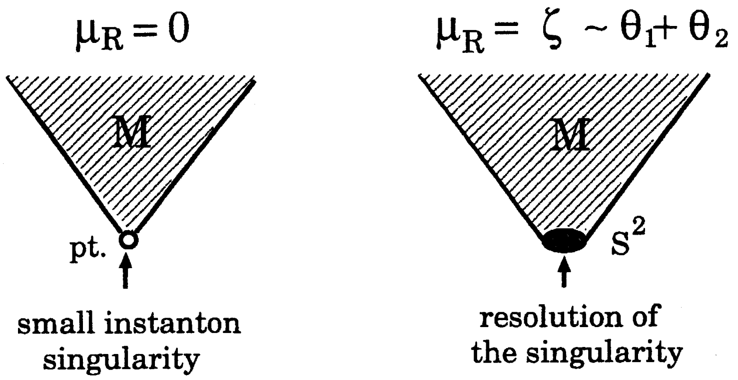

図 2: インスタントン・モジュライ空間 $\mathcal{M}$

ここでこれらの方程式の D-brane 解釈 [24, 140] を紹介する. 背景となる系は k 個の D0-brane と N 枚の D4-brane の BPS 複合系である (図 3 参照).

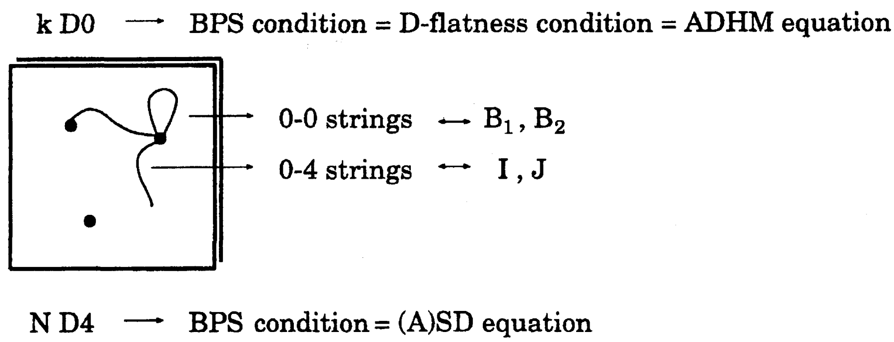

図 3: ADHM 構成法の D-brane 解釈

この系を 2 つの異なった立場から記述しよう. まず D4-brane から見る. このとき例えばゲージーノの SUSY 変換の式から, (4 次元) 自己双対方程式がこの BPS 系を記述するものとして得られ, D0-brane はインスタントンとして記述される. 一方 D0 から見ると SUSY を保つ条件は D-flatness 条件として得られる. D-flatness 条件を書き下すには, D0-brane 上の SYM 理論の零

---

[22]非可換パラメータ θ の自己双対性がゲージ場の自己双対性とちょうど一致する場合は $\zeta = 0$ となる. この特殊な状況に対応する非可換インスタントン解についてはあとで少し議論する.

[23]6 ページで, NC ゲージ理論ではゲージ群が $SU(N)$ では駄目で普通 $U(N)$ とする, とコメントしたが, その $U(N)$ $(\simeq SU(N) \times U(1))$ の $U(1)$ パートがまさに非可換空間特有の重要な役割を果たすのである.

質量スカラー場を持ってこなければならないが，これは 0-0 ストリングからくるもの ($k \times k$ 行列) および (ハイパー多重項の) [24] 0-4 ストリングからくるもの ($k \times N$ 行列) がある．これらをそれぞれ $B_{1,2}$ および $I, J^\dagger$ と表して，D-flatness 条件を書き下すと，ちょうど ADHM 方程式が得られる．どちらの方程式も同じ物理系を記述するものであるから，解空間の等価性は自明である．またインスタントン・モジュライの次元は $4Nk$ であることが知られているが，この D0-D4 BPS 系で D0-brane の動く自由度を考えると，これも明らかである．さらに空間を非可換にした効果は ADHM 構成法そのものの枠組みで自然に現れるが，一方 D-brane 解釈から考えると，B 場の効果が FI パラメータとして D-flatness 条件式に現れたと理解できる．ここに空間を非可換にした効果と磁場を入れた効果が全く同一のものとして現れている．

「0 次元 Dirac 方程式」を経由してゲージ場を構成する手順としては，この系を T 双対変換して D5-D9-brane 系に持って行き，プローブとしての D1-brane から記述する方法が知られている [140, 25].

簡単な具体解を実際に構成してみよう．

<u>BPST 解 ($G = SU(2)$, $k = 1$, $\dim \mathcal{M}_{2,1}^{\mathrm{BPST}} = 5$)</u>

この解は最も基本的かつ重要なインスタントン解であるが，ADHM 構成法によって極めて簡単に構成される．

- 手順 (i)：ADHM 方程式は $k \times k$ 行列の方程式であるから，今の場合 ($k = 1$) トリビアルに解ける．交換子の部分は落ちるので，行列 B_1, B_2 は任意の複素数とすればよく，I, J についても簡単に求まる．結果は次の通り：

$$B_1 = \alpha_1, \quad B_2 = \alpha_2, \quad I = (\rho, 0), \quad J = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho \end{pmatrix}, \qquad \alpha_{1,2} \in \mathbf{C}, \quad \rho \in \mathbf{R}. \tag{3.3}$$

  α の実部，虚部を $\alpha_1 = b_2 + ib_1$, $\alpha_2 = b_4 + ib_3$ のように b_μ で表す．

- 手順 (ii)：「0 次元 Dirac 方程式」は

$$\nabla^\dagger V = \begin{pmatrix} \begin{matrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \end{matrix} & \bar{e}_\mu (x_\mu - b_\mu) \end{pmatrix} V = 0 \tag{3.4}$$

  となり (ただし $\bar{e} = (i\sigma, 1)$)，その解は

$$V = \frac{1}{\sqrt{\phi}} \begin{pmatrix} \bar{e}_\mu (x_\mu - b_\mu) \\ \\ \begin{matrix} -\rho & 0 \\ 0 & -\rho \end{matrix} \end{pmatrix}, \quad \phi = |x - b|^2 + \rho^2 \tag{3.5}$$

  とトリビアルに求まる．規格化因子 ϕ は規格化条件 $V^\dagger V = 1$ から決まった．

[24]今考えている状況は Higgs ブランチに相当する．

- 手順 (iii)：ゲージ場および曲率は V から容易に計算される：

$$A_\mu = V^\dagger \partial_\mu V = \frac{i(x-b)^\nu \eta^{(-)}_{\mu\nu}}{(x-b)^2+\rho^2}, \tag{3.6}$$

$$F_{\mu\nu} = \frac{2i\rho^2}{(|x-b|^2+\rho^2)^2}\eta^{(-)}_{\mu\nu}. \tag{3.7}$$

ここで, $\eta^{(-)}_{\mu\nu}$ は't Hooft のイェータシンボルと呼ばれる ASD テンソルであり, 曲率が反自己双対であることが分かる. モジュライ空間の次元 5 は, 1 インスタントンの位置 b^μ (4 つ) とサイズ[25] ρ (1 つ) の自由度に対応する. 一般に, ADHM データ $B_{1,2}$ の対角成分がインスタントンの位置を表し, ADHM データ I, J がインスタントンのサイズの情報を含む. ADHM データ $B_{1,2}$ が座標 $z_{1,2}$ と常に対になって現れる理由はここにある.

ここでサイズ・ゼロ極限を取ってみよう. このとき $F_{\mu\nu}$ はちょうどデルタ関数型の特異な配位に近付くことが分かる. インスタントンは定義により滑らかな関数でなければならないので, サイズ・ゼロのインスタントンは存在しない. これはちょうどインスタントン・モジュライ空間の特異点 (スモール・インスタントン特異点) に対応する. 非可換空間ではこの特異点が解消し, 新しいクラスのインスタントンが現れる. (図 4 参照.)

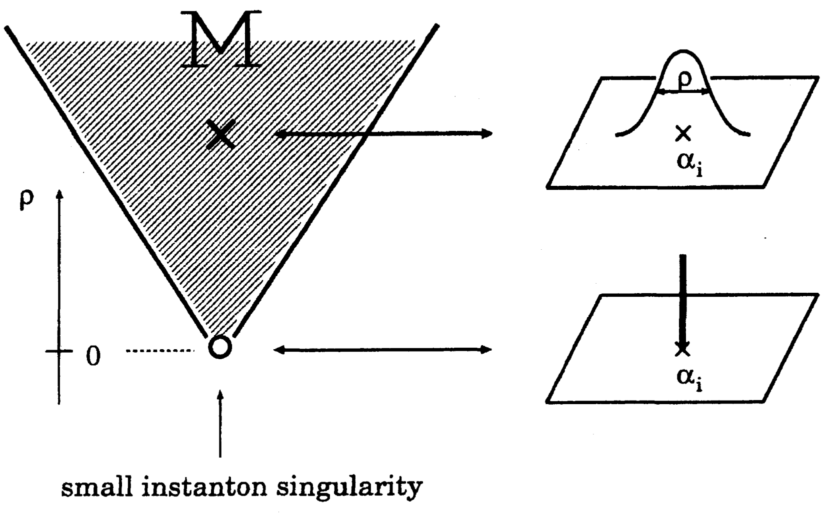

図 4: インスタントン・モジュライ空間 $\mathcal{M}_0$ と BPST インスタントン

非可換 BPST インスタントン解 ($G = U(2),\ k = 1$)

非可換空間上の $G = U(2)$ (ASD) 1 インスタントン解 (非可換 BPST 解) も ADHM 構成法により同様に求められる. これを与える非可換 ADHM 方程式 (3.1) の解としては

$$B_{0,1} = 0,\ I = (\sqrt{\rho^2+\zeta}, 0), J = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

[25] ここでインスタントンのサイズとは, $F_{\mu\nu}$ の半値幅のことである.

(ほぼ自明解) を取ればよい. ($\zeta>0$とした.) 可換空間の場合と比べるとIの値が少し異なるため, さっきと同様にρをゼロにもっていってもIはゼロにならず, サイズ有限の非特異なインスタントンが生き残る. これが実は$U(1)$ インスタントンであり, スモール・インスタントン特異点が解消されたことによって生じた新しいインスタントン解に相当する. $U(1)$ インスタントンは位置を表すモジュライ・パラメータしか持たず, 広がりのサイズは一定 (大体$\sqrt{\zeta}$ぐらい) である. (図 5 参照.)

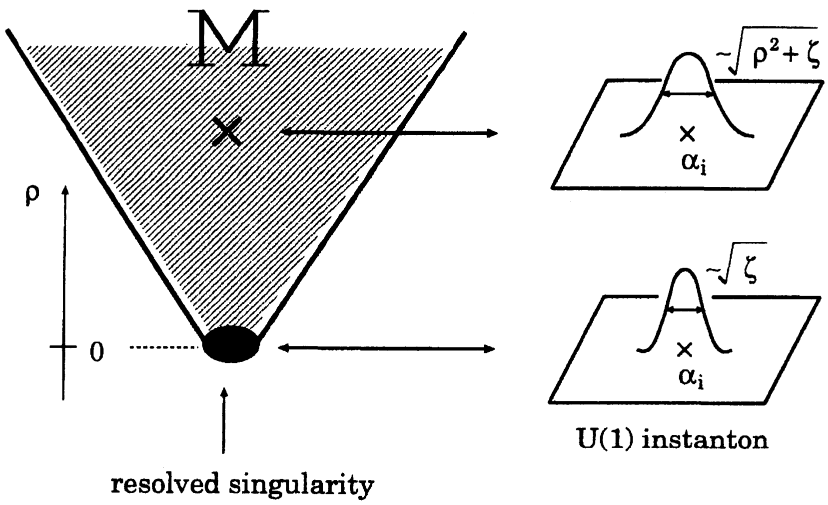

図 5: インスタントン・モジュライ空間$\mathcal{M}_\zeta$と非可換BPSTインスタントン

可換空間と非可換空間のBPSTインスタントンについて, 以下の表にまとめた.

BPST インスタントン		非可換 BPST インスタントン
$\mu_{\mathbf{R}}=0,\ \mu_{\mathbf{C}}=0$	ADHM 方程式	$\mu_{\mathbf{R}}=\zeta,\ \mu_{\mathbf{C}}=0$
$B_1=B_2=0,$ $I=(\rho,0), J^t=(0,\rho)$	ADHM データ	$B_1=B_2=0,$ $I=(\sqrt{\rho^2+\zeta},0), J^t=(0,\rho)$
オービフォールド $\mathbf{C}^2/\mathbf{Z}_2$ (singular)	モジュライ空間	Eguchi-Hanson $\widetilde{\mathbf{C}^2/\mathbf{Z}_2}$ (regular)
$F_{\mu\nu}\to$ デルタ関数 (singular)	ゼロサイズ極限	$F_{\mu\nu}\to U(1)$ インスタントン (regular)

この$U(1)$ インスタントンをより詳しく調べてみよう.

非可換 ASD インスタントン解 ($U(1),\ k=1,\ \theta$: SD)

まずゲージ場と非可換パラメータの自己双対性が逆の場合を考える. 簡単のため$k=1$とし, またインスタントンの位置を原点にとる.[26]

[26] インスタントンの位置のモジュライを加えたければ, あとで平行移動を行えばよい. なお非可換空間上では平行移動はゲージ変換である.

まずADHM方程式を解かなければならないが，ゲージ群が$U(1)$のときはIかJが零になることが知られている [112]．したがってADHM方程式はトリビアルに解け ($B_{1,2}=0, I=\sqrt{\zeta}, J=0$)，「0次元Dirac作用素」は次のようになる：

$$\hat{\nabla}=\begin{pmatrix}\sqrt{\zeta} & 0\\ \hat{\bar{z}}_2 & -\hat{\bar{z}}_1\\ \hat{\bar{z}}_1 & \hat{z}_2\end{pmatrix},\quad \hat{\nabla}^{\dagger}=\begin{pmatrix}\sqrt{\zeta} & \hat{z}_2 & \hat{z}_1\\ 0 & -\hat{\bar{z}}_1 & \hat{\bar{z}}_2\end{pmatrix}. \tag{3.9}$$

$\nabla^{\dagger}\nabla$の逆行列は存在し，

$$\hat{f}=\sum_{n_1,n_2=0}^{\infty}\frac{1}{n_1+n_2+\zeta}|n_1,n_2\rangle\langle n_1,n_2| \tag{3.10}$$

である.[27] 問題はDirac零モードである．「0次元Dirac方程式」の解としては規格化因子を除いて次のものが自然である：

$$\hat{V}_1=\begin{pmatrix}\hat{z}_1\hat{\bar{z}}_1+\hat{z}_2\hat{\bar{z}}_2\\ -\sqrt{\zeta}\hat{\bar{z}}_2\\ -\sqrt{\zeta}\hat{\bar{z}}_1\end{pmatrix},\quad \hat{\nabla}^{\dagger}\hat{V}_1=0. \tag{3.11}$$

しかしこれはオペレータの意味で規格化条件を満たさない．$\hat{V}_1$が零モード$|0,0\rangle$を持ち，規格化因子を求める際$\hat{V}_1^{\dagger}\hat{V}_1$の逆行列を$\mathcal{H}$の中で求めることができないからである．したがって$\hat{V}$を規格化する際はこの点に注意する必要がある．

古内氏は [31] において，全ての議論を$\mathcal{H}_1:=\mathcal{H}-|0,0\rangle\langle 0,0|$に制限すれば，$\hat{V}_1$が正しい自己双対ゲージ場を与えることを示した．さらにシフト演算子を用いて，$\mathcal{H}_1$に制限された議論を$\mathcal{H}$に変換し (ラベルを付け変え)，$\mathcal{H}$で規格化された$\hat{V}$を求めた [32]：

$$\hat{V}=\hat{V}_1\hat{\beta}_1\hat{U}_1^{\dagger},\quad \hat{V}^{\dagger}\hat{V}=1 \tag{3.12}$$

ここで現れた$\hat{U}_1$はシフト演算子と呼ばれるもので次式を満たすものとして定義される：

$$\hat{U}_k\hat{U}_k^{\dagger}=1,\quad \hat{U}_k^{\dagger}\hat{U}_k=1-\hat{P}_k, \tag{3.13}$$

ただし，$\hat{P}_k$はランクkの射影演算子である．この射影演算子$\hat{P}_k$とシフト演算子$\hat{U}_k$が非可換空間では重要な役割を果たし，ソリトン数と密接に関わってくる.[28] 具体的には例えば次のようなものが取れる：

$$\begin{aligned}\hat{U}_k &= \sum_{n_1=1,n_2=0}^{\infty}|n_1,n_2\rangle\langle n_1,n_2|+\sum_{n_2=0}^{\infty}|0,n_2\rangle\langle 0,n_2+k|,\\ \hat{P}_k &= \sum_{m=0}^{k-1}|0,m\rangle\langle 0,m|.\end{aligned} \tag{3.14}$$

[27] $\zeta\neq 0$の場合はつねに$\hat{f}$は存在する ([31] の Appendix A)．

[28] シフト演算子は Atiyah-Bott-Shapiro (ABS) 構成 [5] を非可換の場合に応用することで具体的に構成することができる [61]．

規格化因子 $\hat{\beta}$ は具体的に

$$
\begin{aligned}
\hat{\beta}_1 &= (1-\hat{P}_1)(\hat{V}_1^\dagger \hat{V}_1)^{-\frac{1}{2}}(1-\hat{P}_1) \\
&= \sum_{(n_1,n_2)\neq(0,0)} \frac{1}{\sqrt{(n_1+n_2)(n_1+n_2+\zeta)}} |n_1,n_2\rangle\langle n_1,n_2|
\end{aligned} \tag{3.15}
$$

と求められる．零モード $\hat{V}$ に現れた射影 $(1-\hat{P}_1)$ が $\mathcal{H}_1$ への制限を表し，シフト演算子 $\hat{U}_1$ が $\mathcal{H}_1$ から $\mathcal{H}$ への変換を表している．この2つの操作により正しい零モードが求められる（"Furuuchi's Method"）．この零モードから非特異なゲージ場および曲率が計算され，そのインスタントン数は -1 となることが分かる．射影演算子 $\hat{P}_1$ のランクがちょうどインスタントン数を与えている．

非可換 ASD インスタントン解 ($U(1)$, $k=1$, θ : ASD)

今度はゲージ場と非可換パラメータの自己双対性が共に等しい場合を考えよう．このときインスタントン・モジュライ空間はスモール・インスタントン特異点が存在する．ゲージ群の $U(1)$ パートはここに対応するが，この解を構成してみよう．

まず ADHM 方程式の解は完全にトリビアルとなる：

$$
B_{1,2} = I = J = 0. \tag{3.16}
$$

この「ADHM バックグラウンド」の下「0 次元 Dirac 方程式」を解こう．$I=J=0$ だから式 (3.2) から $\hat{u}$ は決まらない．このときは最初に完全性条件から観察した方がよい．完全性条件の右辺がまず計算されるので，そこから $\hat{v}_1 = |0,0\rangle\langle 0,0|$, $\hat{v}_2 = 0$ が決まる．それを規格化条件に代入すると $\hat{u}\hat{u}^\dagger = 1$, $\hat{u}^\dagger\hat{u} = 1-\hat{P}_1$ すなわち $\hat{u} = \hat{U}_1$（シフト演算子！）が決まり，これが Dirac 方程式も満たす：

$$
\hat{V} = \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{U}_1 \\ |0,0\rangle\langle 0,0| \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{3.17}
$$

シフト演算子 $\hat{U}_1$ が自然に現れたのが面白い．[29]

これからゲージ場（あるいは共変微分オペレータ）を計算すると次のようになる：

$$
\begin{aligned}
\hat{D}_{z_i} &= \hat{V}^\dagger \hat{\partial}_{z_i} \hat{V} = \hat{u}^\dagger \hat{\partial}_{z_i} \hat{u} + \hat{v}^\dagger \hat{\partial}_{z_i} \hat{v} = \hat{U}_1^\dagger \hat{\partial}_{z_i} \hat{U}_1 - |0,0\rangle\langle 0,0| \frac{\hat{\bar{z}}_i}{2\theta^i} |0,0\rangle\langle 0,0| \\
&= \hat{U}_1^\dagger \hat{\partial}_{z_i} \hat{U}_1.
\end{aligned} \tag{3.18}
$$

これはまさに Solution Generating Technique の本質的部分を捉えている．Solution Generating Technique とは次式で定義される変換のことである：

$$
\hat{D}_{z_i} \to \hat{U}_k^\dagger \hat{D}_{z_i} \hat{U}_k \tag{3.19}
$$

[29] Furuuchi's Method はここでは必要がない．

ほとんどゲージ変換のように見えるが, $\hat{U}_k$ がシフト演算子である (ユニタリ演算子でない) ため, ノントリビアルな変換となる. この変換は一般に運動方程式を不変に保つ [60] ため, 真空解といった自明解から, いとも簡単に非自明な (ソリトン) 解が構成される.[30] この真空解から生成される解を "Localized ソリトン" と呼ぶことがあるが, 一般に Solution Generating Technique で生成される解は変換前の既知解と "Localized ソリトン" との複合系となる. したがって "Localized ソリトン" は Solution Generating Technique の本質であり, 上記の結果は "Localized インスタントン" が ADHM 構成法から自然に現れたということを示している.

上記の解の曲率は簡単に計算することができ

$$F_{12} = -F_{34} = i\frac{1}{\theta}|0,0\rangle\langle 0,0| \tag{3.20}$$

のように射影子の形となる. インスタントン数は $\hat{P}_k$ のランクに等しく, -1 であることが分かる.

さらにこの解は厳密な Seiberg-Witten マップ [125, 116] によって可換側にうつすことが可能である. D0-brane 密度は

$$J_{\rm D0}(x) = \frac{2}{\theta^2} + \delta^{(4)}(x). \tag{3.21}$$

となる [68]. 右辺第 2 項が原点に Localize した D0-brane (すなわちインスタントン) を表しており, 実際の配位は特異であることが分かる. これはもちろんモジュライ空間の特異性を考えると当然の結果である. なお右辺第一項は B 場の存在により無限個の D0-brane が束縛して D4-brane を形成していることを表しており, 行列模型 [7, 77] の解釈とも一致している. この系はもとの超対称性が保たれたまま B 場が導入された場合に相当し, タキオンは凝縮していない. それが $\zeta = 0$ に現れているのである.

ゲージ場と非可換パラメータの自己双対性の組み合わせが ASD-SD の場合と ASD-ASD の場合の $U(1)$ インスタントンについて, 以下の表にまとめた.

ASD-SD $U(1)$ インスタントン		ASD-ASD $U(1)$ インスタントン
$\mu_{\mathbf{R}} = \zeta,\ \mu_{\mathbf{C}} = 0$	ADHM 方程式	$\mu_{\mathbf{R}} = 0,\ \mu_{\mathbf{C}} = 0$
$B_1 = B_2 = 0,\ I = \sqrt{\zeta}, J = 0$	ADHM データ	$B_1 = B_2 = 0,\ I = 0, J = 0$
Eguchi-Hanson $\mathbf{C}^2/\mathbf{Z}_2$ (regular)	モジュライ空間	オービフォールド $\mathbf{C}^2/\mathbf{Z}_2$ (singular)
$\hat{D}_\mu = \hat{U}_1 M \hat{\partial}_\mu M^\dagger \hat{U}_1^\dagger$	ゲージ場	$\hat{D}_\mu = \hat{U}_1^\dagger \hat{\partial}_\mu \hat{U}_1$

共に, シフトオペレータの存在がインスタントン数を生み出しているが, シフトの方向は互いに逆である. $U(1)$ インスタントンのインスタントン数の起源については, さまざまな議論がなされている [33, 80, 121, 134].

[30] Solution Generating Technique は弦の場の理論に応用され, タキオン凝縮により不安定な D-brane がより低い次元の D-brane に崩壊するという Sen の予想 [126] が有効理論の枠組みで厳密に検証された [60]. (レヴューとして [45, 58] などがある.)

3.2 Nahm Construction of Monopoles

モノポールの Nahm 構成も同様である. この記事では詳しい議論は省略する. [31]

- 手順 (i) : Nahm 方程式

$$\frac{dT_i}{d\xi} - \frac{i}{2}\epsilon_{ijk}[T_j, T_k] = -\theta\delta_{i3} \tag{3.22}$$

を解く.[32] 右辺の定数は $-(1/2)[z, \bar{z}]$ から現れた.

- 手順 (ii) : Nahm 方程式の解 T_i のもと, 「1 次元 Dirac 方程式」を解く.

- 手順 (ii) :「1 次元 Dirac 方程式」の解 v を用いてインスタントンのときと同様に, $A_i = \int d\xi v^\dagger \partial_i v$, $\Phi = \int d\xi v^\dagger \xi v$ のようにして Higgs 場, ゲージ場を構成する. これは Bogomol'nyi 方程式

$$[\Phi, D_i] - \frac{i}{2}\epsilon_{ijk}[D_j, D_k] = \frac{1}{\theta}\delta_{i3} \tag{3.23}$$

を自動的に満たす. ここでも双対関係が顕著に見て取れる.

モジュライ空間について一言コメントする. Nahm 方程式 (3.22) において $T_i' := T_i + \delta_{i3}\theta\xi$ と定義すると, Nahm 方程式 (3.22) の右辺の定数が吸収され, T_i' が満たす微分方程式は, 可換空間上の Nahm 方程式と全く同じになる. したがって, $G = U(1), U(2)$ 非可換モノポールのモジュライ空間は可換な場合と変わらない [41].

<u>$U(1)$, $k = 1$ Dirac モノポール解</u>

可換空間上の 1-Dirac モノポール解は Nahm 構成法により次のように求められる (Nahm 方程式 (3.22) の解としては $T_i = 0$ (自明解) を取ればよい. $k = 1$ の場合はこれで境界条件も満たされる.) :

$$\Phi = -\frac{1}{2r}, \ A_r = A_\vartheta = 0, \ A_\phi = \frac{1}{2r}\frac{1+\cos\vartheta}{\sin\vartheta}. \tag{3.24}$$

ただし (r, ϑ, ϕ) は普通の極座標である. ゲージ場は $\vartheta = 0$ で発散しており, それから計算される磁場も $\vartheta = 0$, すなわち x^3 軸の正の部分にデルタ関数型の特異性を持つことが分かる. この x^3 軸の正の部分に沿ったストリング状の特異点の集まりを Dirac ストリングと呼ぶ. Dirac ストリングは無限小の幅を持ったソレノイドと解釈でき, ゲージ変換でその方向が変わる非物理的対象である[33]. x^3 軸の正の部分以外では磁場は

$$B_i = -\partial_i\Phi = -\frac{x^i}{2r^3} \tag{3.25}$$

と計算され, 放射状の分布をしている. (図 6 左参照.)

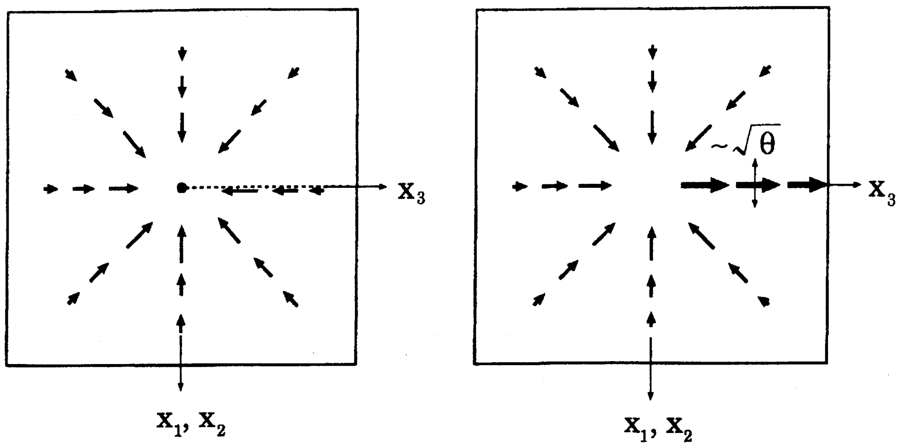

図 6: Dirac モノポールの磁場分布 (可換空間上 (左) V.S. 非可換空間上 (右))

$U(1)$, $k=1$ 非可換 Dirac モノポール解

非可換 1-Dirac モノポールの厳密解は [41] で Nahm 構成法により求められた (非可換 Nahm 方程式 (3.22) の解としては $T_i = -\delta_{i3}\theta\xi$ (自明解) を取ればよい.)：

$$
\begin{aligned}
\Phi &= \sum_{n=0}^{\infty}\Phi_n|n\rangle\langle n| = \pm\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\xi_n^2-\xi_{n-1}^2\right)|n\rangle\langle n| + \left(\xi_0^2+\frac{x^3}{\theta}\right)|0\rangle\langle 0|\right\},\\
A_z &= \frac{1}{\sqrt{2\theta}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{\xi_n}{\xi_{n+1}}\right)a^\dagger|n\rangle\langle n|, \quad A_3=0.
\end{aligned} \tag{3.26}
$$

$$
\text{ここで}\qquad \zeta_n := \int_0^\infty dp\, p^n e^{-\theta p^2+2px^3}, \quad \xi_n := \sqrt{\frac{n\zeta_{n-1}}{2\theta\zeta_n}}. \tag{3.27}
$$

これは至るところ非特異な解である. 無限遠の振る舞い ($r_n + x^3 \to \infty$, $r_n := \sqrt{(x^3)^2+2\theta n}$) は次のようになる[34]：

$$
\Phi_n \sim \begin{cases} \pm\dfrac{x^3}{\theta} & : n=0,\ x^3\to+\infty \\ \pm\dfrac{1}{2r_n} = \pm\dfrac{1}{2\sqrt{(x^3)^2+2\theta n}} & : \text{それ以外} \end{cases} \tag{3.28}
$$

$$
(B_3)_n \sim \begin{cases} \dfrac{1}{\theta} & : n=0,\ x^3\to+\infty \\ -\dfrac{x^3}{2(r_n)^3} & : \text{それ以外} \end{cases} \tag{3.29}
$$

これから分かるように, Higgs 場および磁場はともに $n=0$, $x^3\to\infty$, すなわち x^3 軸の正の部分で特別な振る舞いをする. [35] (図 6 左参照.) x^3 軸の正の部分の一様な磁場 $(B_3(x^3\to+\infty))_0|0\rangle\langle 0|$ は, Weyl 変換でスター積を用いる記述に戻ると, ちょうど Gauss 型の分布 $(2/\theta)\exp\{-((x^1)^2+(x^2)^2)/\theta\}$

[31] 興味ある方は, 私の記事 [48, 44, 45, 46, 47] や [113] をご覧下さい.
[32] さらに境界条件が必要である.
[33] モノポールに関する詳しいレヴューとして例えば [38, 57] がある.
[34] 鞍点法で ζ_n の積分を処理した.
[35] 今 n を大体 1-2 平面上の原点からの距離の 2 乗と思っている ($(x^1)^2+(x^2)^2\sim 2\theta n$).

になり, その幅は大体$\sqrt{\theta}$である. したがって可換空間上への極限$\theta \to 0$で, これはちょうどデルタ関数型の分布になり, もとの特異なDiracストリングが再現される. 以上のことから, x^3軸の正の部分の磁束はDiracストリングが非可換性のために膨らんだため, その内部の磁場が現れたものであり, 解(3.26)はDiracストリング付きのDiracモノポールの非可換版である, [36] とも解釈可能である. モジュライ空間が可換空間と同じであるにも関わらず, 解はこのように面白い振る舞いをする.

Relation to Integrable Systems

非可換1-Diracモノポールの解(3.26)は可積分系の視点からも興味深い形をしている, すなわちYang形式(例えば[104]など参照)で書くことができる[41]:

$$\Phi = \xi^{-1}\partial_3\xi,\ A_z = \xi^{-1}[\hat{\partial}_z, \xi], \tag{3.30}$$

$$\text{ただし}\quad \xi := \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n(x_3)|n\rangle\langle n|. \tag{3.31}$$

このことは非可換空間上でも可積分系の議論をするのが見通し良いことを示唆している. 実際例えば非可換Bogomol'nyi方程式(2.30)は1次元半無限戸田格子(例えば[132]参照)の式に書き換えられる[41]:

$$\frac{d^2 q_n}{dt^2} + e^{q_{n-1}-q_n} - e^{q_n - q_{n+1}} = 0, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{3.32}$$

$$\text{ただし}\quad q_n(t) := \begin{cases} \log\left[\dfrac{e^{\frac{t^2}{2}}}{n!}\xi_n^2\left(\dfrac{t}{2}\right)\right], & t := 2x_3 \quad n \geq 0 \\ -\infty & \qquad\qquad n = -1. \end{cases} \tag{3.33}$$

Yang行列ξの中のξ_nは(3.27)で定義されているものである. 離散的構造が現れたのが興味深い.

4 Conclusion and Discussion

以上, 非可換空間上のゲージ理論とその厳密解について概説した. 非可換インスタントン, 非可換モノポールの構成において, 空間を非可換にしたことで生じた特異点解消の効果により, 様々な新しい物理的対象や面白い性質が現れることが分かった. またこの記事では省略したが, 非可換空間上のゲージ理論は, 弦理論のあるD-brane配位と対応し, D-brane力学の解析で大成功を収めた. その結果, 非可換の考え方や手法は素粒子論の多くの分野に影響を及ぼし, 広い範囲に渡って浸透した.

可積分系の観点から見ても, これらの結果は非常に興味深い. ADHM構成法が非可換空間に拡張され, インスタントン解の構成や解空間の構造が明らかになっただけでなく, 実はTwistor

[36] x^3軸の正の部分の磁束は原点に流入する磁束の総量に等しく, 十分大きい2次元球面で囲って磁場を表面積分するとゼロになる. すなわち磁荷がゼロとなりモノポールとは言えないわけであるが, 可換な場合にDiracストリングを取り除いて扱うのと同様に, この磁束を除いて表面積分すると-1という望ましい値が得られる[41].

理論による定式化も可能である [84, 56, 131]. これは, ASD 方程式が非可換化しても可積分性を保っているということを示している.

一方, より低次元のソリトン方程式, 可積分系として, KdV 方程式, KP 方程式といったものが多数知られている. これらの非可換化についても, 特異点の解消から新しい物理的対象が現れることは十分期待されるが, その体系的研究はこれまでほぼ皆無であった. 非可換空間上の場の方程式というのは無限回微分方程式で記述され, それが解けるという状況はむしろ奇跡に近いのである.

ところがこれらのソリトン方程式, 可積分方程式は実は 4 次元の ASD Yang-Mills 方程式の次元還元によって (ほとんど全て) 得られることが知られている (Ward 予想 [137]) [1, 2, 3, 81, 104]. これと ASD Yang-Mills 方程式の非可換化の成功を合わせると, KdV 方程式, KP 方程式といったソリトン方程式の非可換化も非常に面白いものと期待される.

4 次元 ASD Yang-Mills 方程式は広い意味で Lax 表示の形で書ける. したがって次元還元によって得られた方程式は直接には Lax 表示の形で書ける. Lax 表示を持つ方程式の多くは可積分性が期待されるため, このことが Ward 予想の一つの根拠になっている. 4 次元非可換 ASD Yang-Mills 方程式もまた, 広い意味で Lax 表示の形で書ける. したがって, Lax 表示を持つ非可換空間上の方程式の構成が, 可積分系の非可換化への第一歩となり得る.

私は戸田晃一氏と共同で, 非可換空間上の Lax 方程式 (Lax 表示を持つ方程式) の生成法を提唱し, 様々な新しい非可換 Lax 方程式を見出した [135, 53]. これらの方程式は既知の非可換可積分方程式とちょうど一致し, 可積分系の非可換化の一意性を示唆している. 非可換 Burgers 方程式については線型化, 階層構造の解明にも成功した. すなわち可積分なのである [54]. 私達は Ward 予想の非可換版にあたる次の予想を提唱した :「非可換 Lax 方程式は可積分であり, 4 次元非可換 ASD Yang-Mills 方程式の次元還元によって得られるであろう. (図 7)」

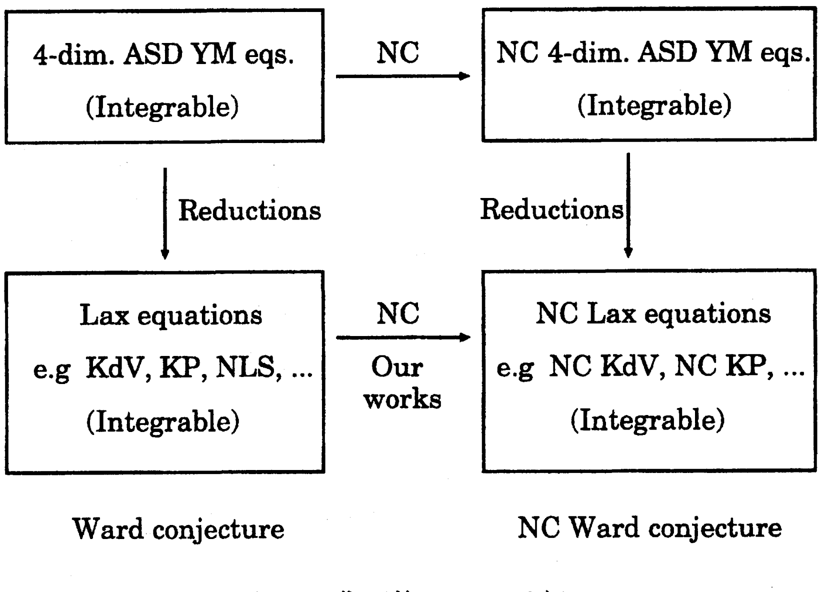

図 7: 非可換 Ward 予想

これは可積分系研究の新しい地平を切り開く可能性を秘めている．弦理論，ツイスター理論との関わりも非常に興味深い．このような次元還元がどのような対称性を保っていて，それは次元還元で得られた方程式の可積分性を与えるのに十分なのか，またそれは，どのようなD-brane配位から理解されるのか，等々，非常に多くの研究テーマが含まれている．この研究は可積分系の「θ変形」の研究であるとも言える．q変形に匹敵する豊饒な世界が広がっているに違いない．最終目標は上図式の完全解明である．

現在すでに，非可換双線型化法，非可換佐藤理論に向けて研究が進んでいる．非可換Burgers方程式の線型化はCole-Hopf変換 $u = \partial_x \log \tau$ の非可換化の成功と等価である．非可換双線型化は，広田変換 $u = \partial_x^2 \log \tau$ の非可換化であると考えられ，解決は時間の問題であろう．すでに擬微分作用素を用いた階層構造の解明[55]，無限個の保存密度の導出[51]など，部分的結果が得られており，手応え十分である．非可換佐藤理論の完成により，解空間(佐藤Grassmannian)が非可換の効果でどのように変形され，その対称性がどのようになるかが明らかになるであろう．そこに非可換空間特有の物理的対象や様々な応用を期待している．これまでに知られている，個々の非可換可積分方程式[9, 12, 19, 20, 21, 29, 30, 39, 40, 53, 54, 74, 75, 96, 98, 99, 100, 103, 118, 115, 135, 136, 142, 144]に対しても，統一的議論が可能になるであろう．現在の研究成果をAppendix Cにまとめている．

Acknowledgements

この記事は2003年7月30日から8月1日の京大数研研究会「可積分系理論とその周辺—課題と展望を探る」の研究会報告です．作成にあたり，研究会での質疑応答や議論がとても参考になりました．世話人の方々，聴講者の方々など関係者全員に，この場をお借りして感謝を申し上げたいと思います．また，アトム型研究員としての基研滞在のときに同室で知り合った戸田晃一さんは，この素晴らしく魅力的な可積分系の世界へ私を招待して下さいました．改めて戸田さんと京都大学基礎物理学研究所に深く感謝申し上げます．

この記事の作成は日本学術振興会の経済援助のもと行われました．

A Known NC BPS Solitons

既知の非可換インスタントン，モノポール解を以下の表にまとめた．引用論文[37]の肩に星印がついているものは，ADHM/Nahm構成法を用いたものである．また，SD, ASDはそれぞれSelf-Dual, Anti-Self-Dualの略である．“◉”の解は“Solution Generating Technique”のBPS版[52, 62]で生成される非可換空間特有のBPSソリトンである[38]．

[37] 敬称は省略させていただきました．

[38] “◉”の解と $U(2)$ $k=1$ SDインスタントン解の一部については，厳密なSeiberg-Wittenマップ[116]を用いて(iii)の記述の解が求められている[68]．

例	(ii) オペレーター形式の記述	(i) スター積を用いる記述	(iii) 背景一様 B 場中の DBI 作用による記述
インスタントン	• $U(1), U(2)$ ASD 解 (θ : SD) ($k = 1, 2, \cdots$) : 多数 $\cdots$ Nekrasov-Schwarz [114]*, 古内 [31]*, 綿村 [138]*, Chu-Khoze-Travaglini [14]* (k : 任意) : 石川・黒木・佐古 [79]*, Lechtenfeld-Popov [97]* • $U(1)$ $k = 1$ ASD 解 (θ : 任意) : Nekrasov [113] • $U(2)$ $k = 1$ SD 解 (θ : SD) : 古内 [34]* ◉ SD Localized 解 (θ : SD, k : 任意) : Aganagic et al. [4], 浜中 [49]*		• $U(1)$ $k = 1$ ASD 解 (B : SD) : 寺嶋 S [133] • $U(1)$ $k = 1$ ASD 解 (B : 任意) : 森山 [109] • 〈関連論文〉: Mariño et al. [102], Kraus-Shigemori [92], $\cdots$
モノポール	• $U(1)$ $k = 1$: Gross-Nekrasov [41]* • $U(2)$ $k = 1$: Gross-Nekrasov [43]* ◉ Fluxon 解 (k : 任意) : Gross-Nekrasov [42], Polychronakos [119], 浜中 [49]*	• $U(1)$ $k = 1$ (θ 1 次) : 橋本 K・平山 [66] • $U(2)$ $k = 1$ (θ 1 次) : Bak [6]*, 橋本 K・畑・森山 [65] (θ 2 次) : 後藤・畑 [37]	• $U(1)$ $k = 1$ (Higgs 場) : 森山 [108] (Gauge 場) : 橋本 K・平山・森山 [67] • 〈関連論文〉: 橋本 A・橋本 K [64], 橋本 K [63], $\cdots$

(i) の解は可換空間上の解 ($\theta = 0$ の場合の解) の周りで θ 展開して求められている.

インスタントンに関しては, (i) の解はすぐに求められると思われるが, (i) と (iii) との対応はモノポールほど議論されていない. モノポールに関しては, (i), (iii) の論文は (i) と (iii) との対応についても詳しく議論しているので, (i), (iii) の記述の間の境界線は明確ではない.

B A List of Reviews of NC Theories

- 総合報告 : 2001 年 2 月の基研研究会のプロシーディング [78], 浜中 [50]
- 場の理論的側面 : Douglas and Nekrasov [26], Szabo [130]
- 基礎とタキオン凝縮への応用 : Harvey [58]
- 非可換トーラス (と行列模型) : Konechny and Schwarz [88]

- 基礎と非可換モノポール：Nekrasov [113]
- 基礎と非可換インスタントン：Konechny and Schwarz [89]
- 基礎と (非可換) ADHM/Nahm 構成法：浜中 [48], 綿村 [138]
- 幾何学的側面 (トポロジカル・チャージなど)：古内 [33], Harvey [59], 松尾 (泰) [106]

C Towards NC Sato's Theory

佐藤理論は, KP 方程式系を親玉とする, ソリトン理論の最も包括的かつ美しい理論として知られ, 擬微分作用素を用いて定式化される. この理論から, 多重ソリトンの厳密解の構成や無限個の保存量の導出だけでなく, 解空間の構造や, 背後にある無限次元の対称性などが全て明らかにされる. 理論の要は, 階層方程式 (無限個の Lax 方程式の系列) の存在と τ 関数の存在である.

ここでは, 佐藤理論の非可換化について現状を簡単に報告する. 特にごく最近得られた, 無限個の保存量について議論する.

まず擬微分作用素を定義する. N 階の (モニックな) 擬微分作用素 A は負巾の微分作用素を含む, 次のような作用素である：

$$A = \partial^N + a_{N-1}\partial^{N-1} + \cdots + a_0 + a_{-1}\partial^{-1} + a_{-2}\partial^{-2} + \cdots. \tag{C.1}$$

ここで次のような記号を導入しておくと便利である：

$$A_{\geq r} := \partial^N + a_{N-1}\partial^{N-1} + \cdots + a_r\partial^r, \tag{C.2}$$

$$A_{\leq r} := A - A_{\geq r+1} = a_r\partial^r + a_{r-1}\partial^{r-1} + \cdots, \tag{C.3}$$

$$\mathrm{res}_r A := a_r. \tag{C.4}$$

特に $\mathrm{res}_{-1}A$ は A の residue と呼ばれる.

負巾の微分 ∂_x^n の掛け算作用素 f への作用は, Leibniz 則の一般化として与えられる：

$$\partial_x^n \cdot f := \sum_{i\geq 0} \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} (\partial_x^i f)\partial^{n-i}, \tag{C.5}$$

ここで二項係数は次のように定義される：

$$\begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} := \frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{i(i-1)\cdots 1}. \tag{C.6}$$

この二項係数の定義 (C.6) は, 負の n でも定義されるため, 式 (C.5) は負巾の微分作用素の作用を定めている. 例えば,

$$\begin{aligned}
\partial_x^{-1} \cdot f &= f\partial_x^{-1} - f'\partial_x^{-2} + f''\partial_x^{-3} - \cdots, \\
\partial_x^{-2} \cdot f &= f\partial_x^{-2} - 2f'\partial_x^{-3} + 3f''\partial_x^{-4} - \cdots, \\
\partial_x^{-3} \cdot f &= f\partial_x^{-3} - 3f'\partial_x^{-4} + 6f''\partial_x^{-5} - \cdots,
\end{aligned} \tag{C.7}$$

ただし $f' := \partial f/\partial x, f'' := \partial^2 f/\partial x^2$. 右辺の ∂_x^{-1} は関数に対して積分作用素 $\int^x dx$ として作用する.

擬微分作用素の合成は, 上記の作用から正しく定義され, 擬微分作用素全体は作用素の代数を成す. (詳しくは [107, 10, 93, 117] 等を参照.)

次に擬微分作用素を用いた非可換階層 (方程式) の定義をする. まず 1 階の擬微分作用素 L を導入しよう：

$$L = \partial_x + u_2\partial_x^{-1} + u_3\partial_x^{-2} + u_4\partial_x^{-3} + \cdots, \tag{C.8}$$

ただし各係数 u_k $(k = 2, 3, \ldots)$ は無限個の「時間変数」$(x^1, x^2, \ldots)$ に依存する関数である. (ただし $x^1 \equiv x$.)

$$u_k = u_k(x^1, x^2, \ldots). \tag{C.9}$$

この無限個の変数の一部が, 時間, 空間の座標に対応する. したがって非可換性はこの無限個の「時間変数」$(x^1, x^2, \ldots)$ に対して導入される.

非可換階層は次式で定義される：

$$\partial_m L = [B_m, L]_\star, \quad m = 1, 2, \ldots, \tag{C.10}$$

ここで微分 ∂_m の L に対する作用は, $\partial_m L := [\partial_m, L]$ あるいは $\partial_m \partial_x^k = 0$ のように ∂_x^k の係数への作用として定義される. また作用素 B_m は, 微分作用素であり,

$$B_m := (\underbrace{L \star \cdots \star L}_{m \text{ 個}})_{\geq 0} =: (L^m)_{\geq r}, \tag{C.11}$$

で定義される. 例えば

$$\begin{aligned} B_1 &= \partial_x, \\ B_2 &= \partial_x^2 + 2u_2, \\ B_3 &= \partial_x^3 + 3u_2\partial_x + 3(u_3 + u_{2x}), \\ B_4 &= \cdots. \end{aligned} \tag{C.12}$$

非可換階層 (C.10) は各 m について, ∂^{1-k} の各係数から生じる無限個の微分方程式を含んでいる. したがって, m を動かすと, 膨大な数の微分方程式が得られる. これを非可換階層方程式と呼ぶ. 非可換階層方程式 (C.10) の左辺は, $\partial_m u_k$ の形になるので, これは x^m 方向の「時間発展」を定める.

さらにこの非可換 (KP) 階層 (C.10) に適当な制約条件を加えると, 様々な非可換階層が導かれる. 特に制約条件 $L^l = B_l$ は非可換 KP 階層の l リダクションと呼ばれ, 非可換 KdV 階層, 非

可換 Boussinesq 階層といった無限個の非可換階層の系列を生み出す．このとき，全ての N, k に対して

$$\frac{\partial u_k}{\partial x^{Nl}} = 0, \tag{C.13}$$

となることが分かる．なぜなら

$$\frac{dL^l}{dx^{Nl}} = [B_{Nl}, L^l]_\star = [(L^l)^N, L^l]_\star = 0. \tag{C.14}$$

この場合，制約の条件 $L^l = B_l$ が，無限種類の場同士に簡明な関係式を与え，無限種類の場 $u_{l+1}, u_{l+2}, u_{l+3}, \ldots$ が $(l-1)$ 種類の場 $u_2, u_3, \ldots, u_l$ で表される．

具体例を紹介する：

- 非可換 KP 階層

まず，何も制約条件を加えない非可換階層 (C.10) が非可換 KP 方程式を含んでいることを示す．非可換階層 (C.10) における擬微分作用素の各べきの係数が，無限個の非可換「発展方程式」を与える．すなわち，$m=1$ に対して，

$$\partial_x^{1-k})\quad \partial_1 u_k = u_k', \quad k = 2, 3, \ldots \quad \Rightarrow \quad x^1 \equiv x, \tag{C.15}$$

$m=2$ に対して，

$$\begin{aligned}
\partial_x^{-1})\quad \partial_2 u_2 &= u_2'' + 2u_3', \\
\partial_x^{-2})\quad \partial_2 u_3 &= u_3'' + 2u_4' + 2u_2 \star u_2' + 2[u_2, u_3]_\star, \\
\partial_x^{-3})\quad \partial_2 u_4 &= u_4'' + 2u_5' + 4u_3 \star u_2' - 2u_2 \star u_2'' + 2[u_2, u_4]_\star, \\
\partial_x^{-4})\quad \partial_2 u_5 &= \cdots,
\end{aligned} \tag{C.16}$$

$m=3$ に対して，

$$\begin{aligned}
\partial_x^{-1})\quad \partial_3 u_2 &= u_2''' + 3u_3'' + 3u_4' + 3u_2' \star u_2 + 3u_2 \star u_2', \\
\partial_x^{-2})\quad \partial_3 u_3 &= u_3''' + 3u_4'' + 3u_5' + 6u_2 \star u_3' + 3u_2' \star u_3 + 3u_3 \star u_2' + 3[u_2, u_4]_\star, \\
\partial_x^{-3})\quad \partial_3 u_4 &= u_4''' + 3u_5'' + 3u_6' + 3u_2' \star u_4 + 3u_2 \star u_4' + 6u_4 \star u_2' \\
&\quad -3u_2 \star u_3'' - 3u_3 \star u_2'' + 6u_3 \star u_3' + 3[u_2, u_5]_\star + 3[u_3, u_4]_\star, \\
\partial_x^{-4})\quad \partial_3 u_5 &= \cdots.
\end{aligned} \tag{C.17}$$

重要なことは，x_2 方向の「時間発展」の式 (C.16) から，無限種類の場 $u_3, u_4, u_5, \ldots$ が 1 種類の場 $2u_2 \equiv u$ で表されてしまうことである．これは階層の存在条件であり，非可換でもそれが成り立つことが分かる．このようにして非線型項の順序も確定する．式 (C.16) の最

初の2つの式を用いて, 式 (C.17) の最初の式から, u_3, u_4 を消去すると, $(2+1)$ 次元の非可換KP方程式 [118, 93] が得られる (ただし $2u_2 \equiv u, x^2 \equiv y, x^3 \equiv t,\ \partial_x^{-1} = \int^x dx$):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{4}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{3}{4}\frac{\partial(u \star u)}{\partial x} + \frac{3}{4}\partial_x^{-1}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{3}{4}\left[u, \partial_x^{-1}\frac{\partial u}{\partial y}\right]_\star. \tag{C.18}$$

したがって非可換階層 (C.10) のことを非可換KP階層と呼ぶ.

- 非可換KdV階層 (非可換KP階層の2リダクション)

制約条件 $L^2 = B_2 =: \partial_x^2 + u$ を非可換KP階層に課すと, 非可換KdV階層が得られる. この場合, 非可換階層

$$\frac{\partial u}{\partial x^m} = \left[B_m, L^2\right]_\star, \tag{C.19}$$

が直接 m 次非可換KdV方程式を生み出す. すなわち, (C.19) は擬微分作用素の正巾, 負巾ともに含まない. 例えば, $m=3$ のとき, $x^3 \equiv t$ とすると $(1+1)$ 次元非可換KdV方程式 [21]

$$\dot{u} = \frac{1}{4}u''' + \frac{3}{4}(u \star u)', \tag{C.20}$$

が得られ, $m=5$ のとき, $x^5 \equiv t$ とすると, $(1+1)$ 次元5次非可換KdV方程式 [135]

$$\dot{u} = \frac{1}{16}u''''' + \frac{5}{16}(u \star u''' + u''' \star u) + \frac{5}{8}(u' \star u' + u \star u \star u)', \tag{C.21}$$

が得られる. ただし $\dot{u} := \partial u/\partial t$.

- 非可換Boussinesq階層 (非可換KP階層の3リダクション)

3リダクション $L^3 = B_3$ により, 非可換Boussinesq階層が得られる. それは, $(1+1)$ 次元非可換Boussinesq(-like) 方程式 [135] を含んでいる:

$$\ddot{u} = \frac{1}{3}u'''' + (u \star u)'' + ([u, \partial_x^{-1}\dot{u}]_\star)', \tag{C.22}$$

ただし with $t \equiv x^2,\ \ddot{u} := \partial^2 u/\partial t^2$.

- 非可換Sawada-Kotera階層 (非可換BKP階層の3リダクション)

BKP階層はKP階層に, B_m $(m = 1, 3, 5, \ldots)$ の定数部分が消えるという条件を課すことで得られる [82]. この非可換化はもちろん可能で, その3リダクションから非可換Sawada-Kotera階層が得られる. その中に $(1+1)$ 次元非可換Sawada-Kotera方程式が含まれている:

$$\dot{u} + \frac{1}{9}u''''' + \frac{5}{9}u''' \star u + \frac{5}{9}u'' \star u' + \frac{5}{9}u \star u' \star u = 0, \tag{C.23}$$

ただし, $t \equiv x^5, u \equiv 3u_2$.

同様にして, 非可換変形 KdV 階層, 非可換 Burgers 階層など広いクラスの非可換ソリトン階層が得られる. AKNS 階層といった行列型のものへの拡張や, BCS 階層への拡張も, 同様に可能である.

このようにして, 様々な非可換階層が得られることが分かった. その中には確かに, これまでに知られている非可換可積分方程式も含まれている. ここで興味あるのは, このようにして得られた階層が本当に可積分系としてありがたいものなのかどうかである.

非可換化は, 非可換方向に無限階の微分を導入する. これは可積分系の見地からは非常に望ましくないことで, 「解ける」見込みが薄れてしまう. また, $(1+1)$ 次元時空上で定義される方程式では, 非可換性を時間方向に導入せざるを得ず, 時間について無限階微分の方程式となってしまう. これでは, 可積分性はおろか, 初期値問題の定義すら難しくなってしまう.

ここでは以下の 2 点について議論する [51]:

- 無限個の「時間発展」の可換性
- 無限個の保存量の存在

前者は

$$\partial_m \partial_n u \;=\; \partial_n \partial_m u \tag{C.24}$$

が全ての m, n について成り立つということである. この証明は可換な場合 [139] と同様なので, ここでは省略する [51]. 非可換 Zakharov-Shabat 方程式

$$\partial_m B_n - \partial_n B_m - [B_m, B_n]_\star = 0. \tag{C.25}$$

の証明が要となる.

ここでは後者について議論する. 無限個の保存量の存在は可積分性の定義として広く受け入れられているものの一つで, これを示すことは極めて重要である [3, 28, 105, 143].

まず, 保存則と保存量の関係を思いだそう. 保存則というのは, 次のような関係式のことで

$$\frac{\partial \sigma(t, x^i)}{\partial t} = \partial_i J^i(t, x^i), \tag{C.26}$$

$\sigma(t, x^i)$ は保存密度, $J^i(t, x^i)$ はそれに付随した流束と呼ばれる. このとき保存密度の空間積分

$$Q(t) = \int_{\text{space}} d^D x \sigma(t, x^i), \tag{C.27}$$

が保存量を与える. すなわち

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{space}} d^D x \sigma(t, x^i) = \int_{\text{space}} d^D x \partial_i J_i(t, x^i) = \int_{\substack{\text{spatial} \\ \text{infinity}}} dS^i J_i(t, x^i) = 0, \tag{C.28}$$

ただし, $J_i(t, x^i)$ の表面積分は消えるものとする. 重要なことは, この議論は非可換空間でも全く同様に成り立つことである. スター積による記述では, 座標, 関数は可換空間のものと全く同

じであり, 微分, 積分も全く同様である. 無限遠の振る舞いも, $\partial_i \sim \mathcal{O}(r^{-1})$ であることから, 非可換にしても変わらないことが期待される. ただし唯一気にしなければならないのは, 何か時間で, 何が空間なのかを明示しなければならないということである.

ここで階層に戻る. 天下りであるが, L^n の留数について考える. これは可換空間のときの G. Wilson の議論 [139] である.

$$\partial_m \mathrm{res}_{-1} L^n = \mathrm{res}_{-1}(\partial_m L^n) = \mathrm{res}_{-1}[B_m, L^n]_\star. \tag{C.29}$$

ここで以下のことに注意しよう：

$$\begin{aligned}\mathrm{res}_{-1}[f\partial_x^p, g\partial_x^q]_\star &= \begin{pmatrix} p \\ p+q+1 \end{pmatrix}\left(f\star g^{(p+q+1)} - (-1)^{p+q+1} g\star f^{(p+q+1)}\right) \qquad (\mathrm{C.30})\\ &= \begin{pmatrix} p \\ p+q+1 \end{pmatrix}\left\{\left(\sum_{k=0}^{p+q}(-1)^k f^{(k)}\star g^{(p+q-k)}\right)' + (-1)^{p+q}[g, f^{(p+q+1)}]_\star\right\},\end{aligned}$$

ただし $f^{(N)} := \partial^N f/\partial x^N$. 第 1 行目のように同じ 2 項係数でうまく括れたのはちょうど ∂_x の (−1) 乗部分 (留数) を拾ってきたおかげである. 可換空間では, 第 2 行目第 2 項の交換子の部分はゼロなので, 式 (C.29) は $\partial_t \sigma = \partial_x J$ の形となり, 保存則を与える. (座標 x はどのような場合にも空間座標の一つなのである.) 非可換空間では, 交換子が邪魔をして, 保存則を壊しているように見える.

ところがこの交換子の部分はうまく評価できる. 実は, 次のことが成り立つ [20, 51]：

$$[f(x), g(x)]_\star = -\theta^{ij}\partial_i(f(x)\diamond \partial_j g(x)). \tag{C.31}$$

ここで, "◇" は Strachan 積 [128] と呼ばれるもので次のように定義される：

$$f(x)\diamond g(x) := \sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{(2s+1)!}\left(\frac{1}{2}\theta^{ij}\partial_i^{(x')}\partial_j^{(x'')}\right)^{2s} f(x')g(x'')\Big|_{x'=x''=x}. \tag{C.32}$$

すなわち, 場の交換子は全微分の形に書けるのである. そうすると, 式 (C.29) は全体として, 全微分の形 $\partial_t \sigma^i = \theta^{ij}\partial_j J^j$ に収まるので, 保存則になり得る. 保存則になるためには, この ∂_j が「時間微分」あるいは「空間微分」であれば良い, すなわち, 非可換性は「時間あるいは空間」方向のみに導入されていれば良い, ということになる. 佐藤理論に現れる無限種類の「時間変数」は形式的に導入されたもので, 本当に「時間, 空間」の意味を持っているのは, 最初の x^1, x^2, x^3 あたりのみである. ここにのみ非可換性を導入するというのは本来自然なことである.

具体的に保存密度の表式を与えるため, L^n, B_m を次のように表しておこう：

$$\begin{aligned} L^n &= \partial_x^n + \sum_{l=1}^{\infty} a_{n-l}\partial_x^{n-l} \\ B_m &= \partial_x^m + \sum_{k=1}^{m-1} b_{m-k}\partial_x^{m-k}, \end{aligned} \tag{C.33}$$

係数 a_{n-l}, b_{m-k} は n, m を決めれば具体的に定まる量である．式 (C.29) より，

$$
\begin{aligned}
\partial_m \mathrm{res}_{-1} L^n &= \mathrm{res}_{-1}[\partial_x^m + \sum_{k=1}^{m-1} b_{m-k}\partial_x^{m-k}, \partial_x^n + \sum_{l=1}^{\infty} a_{n-l}\partial_x^{n-l}]_\star \\
&= \sum_{l=n+1}^{m+n} \begin{pmatrix} m \\ l-n-1 \end{pmatrix} a_{n-l}^{(m+n-l+1)} + \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=n+1}^{n+1+m-k} \begin{pmatrix} m-k \\ l-n-1 \end{pmatrix} \\
&\quad \times \left\{ \left(\sum_{N=0}^{m+n-k-l} (-1)^N b_{m-k}^{(N)} \star a_{n-l}^{(m+n-k-l-N)} \right)' + (-1)^{m+n-k-l} \left[a_{n-l}, b_{m-k}^{(m+n-k-l+1)} \right]_\star \right\} \\
&= \left\{ \sum_{l=n+1}^{m+n} \begin{pmatrix} m \\ l-n-1 \end{pmatrix} a_{n-l}^{(m+n-l)} + \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=n+1}^{\substack{n+1+\\m-k}} \begin{pmatrix} m-k \\ l-n-1 \end{pmatrix} \sum_{N=0}^{\substack{m+n\\-k-l}} (-1)^N b_{m-k}^{(N)} \star a_{n-l}^{(m+n-k-l-N)} \right\}' \\
&\quad - \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=n+1}^{n+1+m-k} \begin{pmatrix} m-k \\ l-n-1 \end{pmatrix} (-1)^{m+n-k-l} \theta^{ij}\partial_i \left(a_{n-l} \diamond \partial_j b_{m-k}^{(m+n-k-l+1)} \right)
\end{aligned}
$$

これが非可換階層に対する，(一般化された) 保存則である．非可換性が「時間，空間」方向にのみ導入されていれば，これが普通の意味の保存則となる．座標 x^m が時間座標 t であるとき，(無限個の) 保存密度は次式のようになる $(n = 1, 2, \ldots)$：

$$
\sigma = \mathrm{res}_{-1} L^n + \theta^{mi} \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=n+1}^{n+1+m-k} (-1)^{m+n-k-l} \begin{pmatrix} m-k \\ l-n-1 \end{pmatrix} a_{n-l} \diamond \partial_i b_{m-k}^{(m+n-k-l+1)}, \qquad \text{(C.34)}
$$

空間—空間非可換性のときには，保存密度は L^n 部分のみである．したがってこのときの保存量は可換な場合と全く同じものになる．これは式 (2.14) を見れば初めから分かったことである．時間—空間非可換性のときには，(C.34) の第 2 項の寄与があるため，保存密度が大幅に変形されることが分かる．この場合の具体例をいくつか紹介する．($\mathrm{res}_{-r} L^n$ の具体的表式は [51] の Appendix A から見て取れる.)

- 空間—時間座標が $(x, y, t) \equiv (x^1, x^2, x^3)$, $[t, x] = i\theta$ のとき

  非可換 KP 階層 ($[t, x] = i\theta$), 非可換 KdV 階層など多くの階層がこれに当てはまる．保存密度は，

$$
\begin{aligned}
\sigma &= \mathrm{res}_{-1} L^n + \theta^{mi} \sum_{k=1}^{3}\sum_{l=n+1}^{n+4-k} (-1)^{1+n-k-l} \begin{pmatrix} 3-k \\ l-n-1 \end{pmatrix} a_{n-l} \diamond \partial_i b_{3-k}^{(4+n-k-l)} \\
&= \mathrm{res}_{-1} L^n + \theta(-a_{-1} \diamond b_0' + a_{-1} \diamond b_1'' - a_{-2} \diamond b_1') \\
&= \mathrm{res}_{-1} L^n - 3\theta\left((\mathrm{res}_{-1} L^n) \diamond u_3' + (\mathrm{res}_{-2} L^n) \diamond u_2'\right). \qquad \text{(C.35)}
\end{aligned}
$$

- 空間—時間座標が $(x, t) \equiv (x^1, x^2)$, $[t, x] = i\theta$ のとき

  非可換 Boussinesq 階層がこれに当てはまる．保存密度は，

$$
\begin{aligned}
\sigma &= \mathrm{res}_{-1} L^n + \theta \sum_{k=1}^{2}\sum_{l=n+1}^{n+3-k} (-1)^{n-k-l} \begin{pmatrix} 2-k \\ l-n-1 \end{pmatrix} a_{n-l} \diamond b_{2-k}^{(4+n-k-l)} \\
&= \mathrm{res}_{-1} L^n + \theta a_{-1} \diamond b_0' \\
&= \mathrm{res}_{-1} L^n + 2\theta(\mathrm{res}_{-1} L^n) \diamond u_2'. \qquad \text{(C.36)}
\end{aligned}
$$

l リダクションした階層に対しては，保存密度 (C.34) は $n = Nl$ $(N = 1, 2, \ldots)$ に対して自明なものになる．これは出発点 (C.29) に戻れば明らか．

また時間—空間非可換性の場合の 1 ソリトン解に対しては，式 (2.13) より，時空の適当なスケールによって常に可換な場合と同じものが取れる [21, 54]．したがって保存密度も可換な場合と同じものとなる．

参考文献

[1] M. J. Ablowitz, S. Chakravarty and R. G. Halburd, "Integrable systems and reductions of the self-dual Yang-Mills equations," J. Math. Phys. **44** (2003) 3147.

[2] M. J. Ablowitz, S. Chakravarty and L. A. Takhtajan, "A selfdual Yang-Mills hierarchy and its reductions to integrable systems in (1+1)-dimensions and (2+1)-dimensions," Commun. Math. Phys. **158** (1993) 289.

[3] M. J. Ablowitz and P. A. Clarkson, *Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering*, (Cambridge UP, 1991) [ISBN/0-521-38730-2].

[4] M. Aganagic, R. Gopakumar, S. Minwalla and A. Strominger, "Unstable solitons in noncommutative gauge theory," JHEP **0104** (2001) 001 [hep-th/0009142]. [39]

[5] M. F. Atiyah, R. Bott and A. Shapiro, "Clifford modules," Topology **3** suppl. 1 (1964) 3.

[6] D. Bak, "Deformed Nahm equation and a noncommutative BPS monopole," Phys. Lett. B **471** (1999) 149 [hep-th/9910135].

[7] T. Banks, W. Fischler, S. H. Shenker and L. Susskind, "M theory as a matrix model: A conjecture," Phys. Rev. D **55** (1997) 5112 [hep-th/9610043].

[8] J. Bellissard, A. van Elst and H. Schulz-Baldes, "The non-commutative geometry and the quantum Hall effect," [cond-mat/9411052].

[9] S. Bieling, "Interaction of noncommutative plane waves in 2+1 dimensions," J. Phys. A **35** (2002) 6281 [hep-th/0203269].

[10] M. Błaszak, *Multi-Hamiltonian Theory of Dynamical Systems* (Springer, 1998) [ISBN/3-540-64251-X].

[11] J. M. Burgers, "A mathematical model illustrating the theory of turbulence," Adv. Appl. Mech. **1** (1948) 171.

[12] I. Cabrera-Carnero and M. Moriconi, "Noncommutative integrable field theories in 2d," hep-th/0211193.

[13] A. S. Cattaneo and G. Felder, "A path integral approach to the Kontsevich quantization formula," Commun. Math. Phys. **212** (2000) 591 [math.qa/9902090].

[14] C. S. Chu, V. V. Khoze and G. Travaglini, "Notes on noncommutative instantons," Nucl. Phys. B **621** (2002) 101 [hep-th/0108007].

[39] hep-th/～とあるのは論文のプレプリント番号であり，[http://xxx.lanl.gov/archive/hep-th] から検索，入手できる．

[15] J. D. Cole, "On a quasi-linear parabolic equation occuring in aerodynamics," Quart. Appl. Math. **9** (1951) 225.

[16] A. Connes, *Noncommutative Geometry* (Academic Pr., 1994) [ISBN/012185860X].

[17] D. H. Correa, G. S. Lozano, E. F. Moreno and F. A. Schaposnik, "Comments on the U(2) noncommutative instanton," Phys. Lett. B **515** (2001) 206 [hep-th/0105085].

[18] G. H. Derrick, "Comments on nonlinear wave equations as models for elementary particles," J. Math. Phys. **5** (1964) 1252.

[19] A. Dimakis and F. Müller-Hoissen, Int. J. Mod. Phys. B **14** (2000) 2455 [hep-th/0006005]; Lett. Math. Phys. **54** (2000) 123 [hep-th/0007160]; J. Phys. A **34** (2001) 9163 [nlin.si/0104071].

[20] A. Dimakis and F. Müller-Hoissen, "A noncommutative version of the nonlinear Schroedinger equation," hep-th/0007015; Czech. J. Phys. **51** (2001) 1285.

[21] A. Dimakis and F. Müller-Hoissen, "Noncommutative Korteweg-de-Vries equation," Phys. Lett. A **278** (2000) 139 [hep-th/0007074].

[22] A. Dimakis and F. Müller-Hoissen, "Bicomplex formulation and Moyal deformation of (2+1)-dimensional Fordy-Kulish systems," J. Phys. A **34** (2001) 2571 [nlin.si/0008016].

[23] N. Dorey, T. J. Hollowood, V. V. Khoze and M. P. Mattis, "The calculus of many instantons," Phys. Rept. **371** (2002) 231 [hep-th/0206063].

[24] M. R. Douglas, "Branes within branes," hep-th/9512077.

[25] M. R. Douglas, "Gauge fields and D-branes," J. Geom. Phys. **28** (1998) 255 [hep-th/9604198].

[26] M. R. Douglas and N. A. Nekrasov, "Noncommutative field theory," Rev. Mod. Phys. **73** (2002) 977 [hep-th/0106048].

[27] Z. F. Ezawa, *Quantum Hall effects: Field theoretical approach and related topics*, (World Scientific, 2000) [ISBN/9810234309].

[28] L. D. Faddeev and L. A. Takhtajan, *Hamiltonian Methods in the Theory of Solitons* (Springer, 1987) [ISBN/0-387-15579-1].

[29] F. Franco-Sollova and T. Ivanova, "On noncommutative merons and instantons," J. Phys. A **36** (2003) 4207 [hep-th/0209153].

[30] K. Furuta, T. Inami and M. Yamamoto, "Topics in nonlinear sigma models in D = 3," hep-th/0211129.

[31] K. Furuuchi, "Instantons on noncommutative $\mathbf{R}^4$ and projection operators," Prog. Theor. Phys. **103** (2000) 1043 [hep-th/9912047].

[32] K. Furuuchi, "Equivalence of projections as gauge equivalence on noncommutative space," Commun. Math. Phys. **217** (2001) 579 [hep-th/0005199].

[33] K. Furuuchi, "Topological charge of U(1) instantons on noncommutative $\mathbf{R}^4$," [hep-th/0010006].

[34] K. Furuuchi, "Dp-D(p+4) in noncommutative Yang-Mills," JHEP **0103** (2001) 033 [hep-th/0010119].

[35] I. M. Gelfand and L. A. Dikii, "Fractional powers of operators and Hamiltonian systems," Funct. Anal. Appl. **10** (1976) 13 (Russian), 259 (English).

[36] R. Gopakumar, S. Minwalla and A. Strominger, "Noncommutative solitons," JHEP **0005** (2000) 020 [hep-th/0003160].

[37] S. Goto and H. Hata, "Noncommutative monopole at the second order in theta," Phys. Rev. D **62** (2000) 085022 [hep-th/0005101].

[38] P. Goddard and D. I. Olive, "Magnetic monopoles in gauge field theories," Rept. Prog. Phys. **41** (1978) 1357.

[39] M. T. Grisaru and S. Penati, "An integrable noncommutative version of the sine-Gordon system," Nucl. Phys. B **655** (2003) 250 [hep-th/0112246].

[40] M. T. Grisaru, L. Mazzanti, S. Penati and L. Tamassia, "Some properties of the integrable noncommutative sine-Gordon system," hep-th/0310214.

[41] D. J. Gross and N. A. Nekrasov, "Monopoles and strings in noncommutative gauge theory," JHEP **0007** (2000) 034 [hep-th/0005204].

[42] D. J. Gross and N. A. Nekrasov, "Dynamics of strings in noncommutative gauge theory," JHEP **0010** (2000) 021 [hep-th/0007204].

[43] D. J. Gross and N. A. Nekrasov, "Solitons in noncommutative gauge theory," JHEP **0103** (2001) 044 [hep-th/0010090].

[44] 浜中 真志, "非可換ゲージ理論におけるソリトン解 (増補版)[40]," ※ 2001 年 2 月の研究会「可積分系研究の現状と展望」の 講演アブストラクト.

[45] 浜中 真志, "Exact BPS Solitons in Noncommutative Gauge Theories," 素粒子論研究 **104-3** (2001-12) C87-C102 ([78] 所収).

[46] 浜中 真志, "Recent Developments in Non-Commutative Gauge Theory," 素粒子論研究 **104-5** (2002-2) E27-E44, ※ 2001 年 7 月の基研研究会「場の量子論 2001」のプロシーディング.

[47] 浜中 真志, "非可換空間上のゲージ理論とソリトン," ※ 2002 年 9 月の研究集会 「量子化の幾何学 2 」の研究会報告.

[48] 浜中 真志, "ADHM/Nahm 構成法とその双対性," 素粒子論研究 **106-1** (2002-10) 1-60.

[49] M. Hamanaka, "ADHM/Nahm construction of localized solitons in noncommutative gauge theories," Phys. Rev. D **65** (2002) 085022 [hep-th/0109070].

[50] M. Hamanaka, "Noncommutative solitons and D-branes," Ph. D thesis [hep-th/0303256].

[51] M. Hamanaka, "Commuting flows and conservation laws for noncommutative Lax hierarchies," hep-th/0311206.

---

[40] 私が書いた記事については, 私のホームページ [http://www2.yukawa.kyoto-u.ac.jp/~hamanaka] にも置かれております.

[52] M. Hamanaka and S. Terashima, "On exact noncommutative BPS solitons," JHEP **0103** (2001) 034 [hep-th/0010221].

[53] M. Hamanaka and K. Toda, "Towards noncommutative integrable systems," Phys. Lett. A **316** (2003) 77 [hep-th/0211148].

[54] M. Hamanaka and K. Toda, "Noncommutative Burgers equation," J. Phys. A **36** (2003) 11981 [hep-th/0301213].

[55] M. Hamanaka and K. Toda, "Towards noncommutative integrable equations," hep-th/0309265.

[56] K. C. Hannabuss, "Non-commutative twistor space," Lett. Math. Phys. **58** (2001) 153 [hep-th/0108228].

[57] J. A. Harvey, "Magnetic monopoles, duality, and supersymmetry," [hep-th/9603086].

[58] J. A. Harvey, "Komaba lectures on noncommutative solitons and D-branes," [hep-th/0102076].

[59] J. A. Harvey, "Topology of the gauge group in noncommutative gauge theory," [hep-th/0105242].

[60] J. A. Harvey, P. Kraus and F. Larsen, "Exact noncommutative solitons," JHEP **0012** (2000) 024 [hep-th/0010060].

[61] J. A. Harvey and G. W. Moore, "Noncommutative tachyons and K-theory," J. Math. Phys. **42** (2001) 2765 [hep-th/0009030].

[62] K. Hashimoto, "Fluxons and exact BPS solitons in non-commutative gauge theory," JHEP **0012** (2000) 023 [hep-th/0010251].

[63] K. Hashimoto, "Non-linear / Non-commutative non-Abelian monopoles," Phys. Rev. D **65** (2002) 065014 [hep-th/0107226].

[64] A. Hashimoto and K. Hashimoto, "Monopoles and dyons in non-commutative geometry," JHEP **9911** (1999) 005 [hep-th/9909202].

[65] K. Hashimoto, H. Hata and S. Moriyama, "Brane configuration from monopole solution in non-commutative super Yang-Mills theory," JHEP **9912** (1999) 021 [hep-th/9910196].

[66] K. Hashimoto and T. Hirayama, "Branes and BPS configurations of noncommutative / commutative gauge theories," Nucl. Phys. B **587** (2000) 207 [hep-th/0002090].

[67] K. Hashimoto, T. Hirayama and S. Moriyama, "Symmetry origin of nonlinear monopole," JHEP **0011** (2000) 014 [hep-th/0010026].

[68] K. Hashimoto and H. Ooguri, "Seiberg-Witten transforms of noncommutative solitons," Phys. Rev. D **64** (2001) 106005 [hep-th/0105311].

[69] 林 浩一, "モノポール," 物理学最前線 **6** (共立出版, 1984) 77-125 [ISBN/4-320-03188-1].

[70] R. Hirota, "Exact solution of the Korteweg de Vries equation for multiple collisions of solitons," Phys. Rev. Lett. **27** (1971) 1192.

[71] N. J. Hitchin, G. B. Segal and R. S. Ward, *Integrable Systems: Twistors, Loop Groups, and Riemann Surfaces* (Oxford UP, 1999) [ISBN/0-19-850421-7].

[72] P. M. Ho, "Twisted bundle on noncommutative space and U(1) instanton," hep-th/0003012.

[73] E. Hopf, "The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$," Comm. Pure Appl. Math. **3** (1950) 201.

[74] Z. Horváth, O. Lechtenfeld and M. Wolf, "Noncommutative instantons via dressing and splitting approaches," JHEP **0212** (2002) 060 [hep-th/0211041].

[75] M. Ihl and S. Uhlmann, "Noncommutative extended waves and soliton-like configurations in N = 2 string theory," Int. J. Mod. Phys. B **18** (2003) 4889 [hep-th/0211263].

[76] N. Imai, K. Ishikawa, T. Matsuyama and I. Tanaka, "Field theory in a strong magnetic field and the quantum Hall effect: integer Hall effect," Phys. Rev. B **42** (1990) 10610.

[77] N. Ishibashi, H. Kawai, Y. Kitazawa and A. Tsuchiya, "A large-N reduced model as superstring," Nucl. Phys. B **498** (1997) 467 [hep-th/9612115].

[78] 石川 洋, 加藤 光裕, 川野 輝彦, 佐々木 隆, 寺嶋 靖治, 綿村 哲, *Proceeding of Workshop on Noncommutative Geometry in String Theory and Field Theories*, 文部省特定領域研究(B)707「超対称性理論」会議録シリーズ No.8 (2001). [41]

[79] T. Ishikawa, S. I. Kuroki and A. Sako, "Elongated U(1) instantons on noncommutative $\mathbf{R}^4$," JHEP **0112** (2001) 000 [hep-th/0109111].

[80] T. Ishikawa, S. I. Kuroki and A. Sako, "Instanton number calculus on noncommutative R(4)," JHEP **0208** (2002) 028 [hep-th/0201196].

[81] T. A. Ivanova and A. D. Popov, "Selfdual Yang-Mills fields in $D = 4$ and integrable systems in $1 \leq D \leq 3$," Theor. Math. Phys. **102** (1995) 280 [Teor. Mat. Fiz. **102** (1995) 384].

[82] M. Jimbo and T. Miwa, "Solitons and infinite dimensional Lie algebras," Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto **19** (1983) 943.

[83] B. B. Kadomtsev and V. I. Petviashvili, "On the stability of solitary waves in weakly dispersive media," Sov. Phys. Doklady **15** (1970) 539.

[84] A. Kapustin, A. Kuznetsov and D. Orlov, "Noncommutative instantons and twistor transform," Commun. Math. Phys. **221** (2001) 385 [hep-th/0002193].

[85] 加藤 光裕, "Noncommutative Geometry and String Theory," 素粒子論研究 **102-3** (2000-12) C6, ※ 2000年7月の基研研究会「場の量子論 2000」のプロシーディング.

[86] K. Y. Kim, B. H. Lee and H. S. Yang, "Comments on instantons on noncommutative $\mathbf{R}^4$," hep-th/0003093.

[87] K. Y. Kim, B. H. Lee and H. S. Yang, "Noncommutative instantons on $\mathbf{R}^2_{NC} \times \mathbf{R}^2_C$," Phys. Lett. B **523** (2001) 357 [hep-th/0109121].

[41] [http://www-hep.phys.s.u-tokyo.ac.jp/japanese/tokutei99.html] に掲載中.

[88] A. Konechny and A. Schwarz, "Introduction to M(atrix) theory and noncommutative geometry," [hep-th/0012145].

[89] A. Konechny and A. Schwarz, "Introduction to M(atrix) theory and noncommutative geometry, part II," [hep-th/0107251].

[90] M. Kontsevich, "Deformation quantization of Poisson manifolds, I," [q-alg/9709040].

[91] D. J. Korteweg and G. de Vries, "On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves," Phil. Mag. **39** (1895) 422.

[92] P. Kraus and M. Shigemori, "Non-commutative instantons and the Seiberg-Witten map," JHEP **0206** (2002) 034 [hep-th/0110035].

[93] B. A. Kupershmidt, "Mathematics of dispersive water waves," Commun. Math. Phys. **99** (1988) 51.

[94] B. Kupershmidt, *KP or mKP : noncommutative mathematics of Lagrangian, Hamiltonian, and integrable systems* (AMS, 2000) [ISBN/0821814001].

[95] L. D .Landau, *Quantum Mechanics (Non-Relativistic Theory)* (Butterworth-Heinemann, 1997) [ISBN/0750635398].

[96] O. Lechtenfeld and A. D. Popov, JHEP **0111** (2001) 040 [hep-th/0106213]; Phys. Lett. B **523** (2001) 178 [hep-th/0108118].

[97] O. Lechtenfeld and A. D. Popov, "Noncommutative 't Hooft instantons," JHEP **0203** (2002) 040 [hep-th/0109209].

[98] O. Lechtenfeld and A. D. Popov, "Noncommutative monopoles and Riemann-Hilbert problems," hep-th/0306263.

[99] O. Lechtenfeld, A. D. Popov and B. Spendig, "Noncommutative solitons in open N = 2 string theory," JHEP **0106** (2001) 011 [hep-th/0103196].

[100] M. Legare, "Noncommutative generalized NS and super matrix KdV systems from a noncommutative version of (anti-)self-dual Yang-Mills equations," hep-th/0012077; J. Phys. A **35** (2002) 5489.

[101] 前田 吉昭, 梶浦 宏成 (高村 亮 記), 「変形量子化入門」東京大学数理科学セミナリーノート **20** (2002) [ISSN/0919-8180].

[102] M. Marino, R. Minasian, G. Moore and A. Strominger, "Nonlinear instantons from supersymmetric p-branes," JHEP **0001** (2000) 005 [hep-th/9911206].

[103] L. Martina and O. K. Pashaev, "Burgers' equation in non-commutative space-time," hep-th/0302055.

[104] L. J. Mason and N. M. Woodhouse, *Integrability, self-duality, and twister theory* (Oxford, 1996) [ISBN/0-19-853498-1].

[105] J. Matsukidaira, J. Satsuma and W. Strampp, "Conserved quantities and symmetries of KP hierarchy," J. Math. Phys. **31** (1990) 1426.

[106] 松尾 泰, "Geometrical aspects of noncommutative soliton," 素粒子論研究 **104-3** (2001-12) C38-C59 ([78] 所収).

[107] T. Miwa, M. Jimbo and E. Date, (translated by M. Reid), *Solitons : differential equations, symmetries and infinite dimensional algebras* (Cambridge UP, 2000) [ISBN/0521561612].

[108] S. Moriyama, "Noncommutative monopole from nonlinear monopole," Phys. Lett. B **485** (2000) 278 [hep-th/0003231].

[109] S. Moriyama, "Noncommutative / nonlinear BPS equations without zero slope limit," JHEP**0008** (2000) 014 [hep-th/0006056].

[110] J. E. Moyal, "Quantum mechanics as a statistical theory," Proc. Cambridge Phil. Soc. **45** (1949) 99; H. J. Groenewold, "On the principles of elementary quantum mechanics," Physica **12** (1946) 405.

[111] H. Nakajima, "Resolutions of moduli spaces of ideal instantons on $\mathbf{R}^4$," *Topology, Geometry and Field Theory* (World Scientific, 1994) 129 [ISBN/981-02-1817-6].

[112] H. Nakajima, *Lectures on Hilbert Schemes of Points on Surfaces* (AMS, 1999) [ISBN/0-8218-1956-9].

[113] N. A. Nekrasov, "Trieste lectures on solitons in noncommutative gauge theories," [hep-th/0011095].

[114] N. Nekrasov and A. Schwarz, "Instantons on noncommutative $\mathbf{R}^4$, and (2,0) superconformal six dimensional theory," Commun. Math. Phys. **198** (1998) 689 [hep-th/9802068].

[115] H. Nishino and S. Rajpoot, "Noncommutative self-dual supersymmetric Yang-Mills theory," Phys. Lett. B **572** (2003) 91 [hep-th/0306290].

[116] Y. Okawa and H. Ooguri, "An exact solution to Seiberg-Witten equation of noncommutative gauge theory," Phys. Rev. D **64** (2001) 046009 [hep-th/0104036].

[117] Y. Ohta, J. Satsuma, D. Takahashi and T. Tokihiro, Prog. Theor. Phys. Suppl. **94** (1988) 210.

[118] L. D. Paniak, "Exact noncommutative KP and KdV multi-solitons," hep-th/0105185.

[119] A. P. Polychronakos, "Flux tube solutions in noncommutative gauge theories," Phys. Lett. B **495** (2000) 407 [hep-th/0007043].

[120] A. P. Polychronakos, "Quantum Hall states as matrix Chern-Simons theory," JHEP **0104** (2001) 011 [hep-th/0103013].

[121] A. Sako, "Instanton number of noncommutative $U(n)$ gauge theory," JHEP **0304** (2003) 023 [hep-th/0209139].

[122] M. Sato, RIMS Kokyuroku **439** (1981) 30; M. Sato and Y. Sato, Lect. Notes Num. Appl. Anal. **5** (1982) 259.

[123] J. Satsuma and R. Hirota, "A coupled KdV equation is one case of the four reduction of the KP hierarchy," J. Phys. Soc. Jap. **51** (1982) 3390.

[124] K. Sawada and T. Kotera, "A method for finding N-soliton solutions of the K.d.V. equation and K.d.V.-like equation," Prog. Theor. Phys. **51** (1974) 1355.

[125] N. Seiberg and E. Witten, "String theory and noncommutative geometry," JHEP **9909** (1999) 032 [hep-th/9908142].

[126] A. Sen, "Non-BPS states and branes in string theory," [hep-th/9904207].

[127] F. A. Schaposnik, "Noncommutative solitons and instantons," hep-th/0310202

[128] I. Strachan, "A geometry for multidimensional integrable systems," J. Geom. Phys. **21** (1997) 255. [hep-th/9604142].

[129] L. Susskind, "The quantum Hall fluid and non-commutative Chern Simons theory," hep-th/0101029.

[130] R. J. Szabo, "Quantum field theory on noncommutative spaces," Phys. Rept. **378** (2003) 207 [hep-th/0109162]

[131] K. Takasaki, "Anti-self-dual Yang-Mills equations on noncommutative spacetime," J. Geom. Phys. **37** (2001) 291 [hep-th/0005194].

[132] 高崎 金久,「可積分系の世界 戸田格子とその仲間」(共立出版, 2001) [ISBN/4-320-01669-6].

[133] S. Terashima, "U(1) instanton in Born-Infeld action and noncommutative gauge theory," Phys. Lett. B **477** (2000) 292 [hep-th/9911245].

[134] Y. Tian, C. J. Zhu and X. C. Song, "Topological charge of noncommutative ADHM instanton," Mod. Phys. Lett. A **18** (2003) 1691 [hep-th/0211225].

[135] K. Toda, "Extensions of soliton equations to non-commutative $(2+1)$ dimensions," Proceedings of workshop on integrable theories, solitons and duality, Sao Paulo, Brazil, 1-6 July 2002 [JHEP PRHEP-unesp2002/038].

[136] N. Wang and M. Wadati, J. Phys. Soc. Jap. **72** (2003) 1366; J. Phys. Soc. Jap. **72** (2003) 1881; J. Phys. Soc. Jap. **72** (2003) 3055.

[137] R. S. Ward, Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A **315** (1985) 451; "Multidimensional integrable systems," Lect. Notes Phys. **280** (Springer, 1986) 106; "Integrable systems in twistor theory," in *Twistors in Mathematics and Physics* (Cambridge UP, 1990) 246.

[138] 綿村 哲, "非可換空間上のゲージ理論," Summer School「数理物理 2002」予稿集 (2002) 35-98.

[139] G. Wilson, "Commuting flows and conservation laws for Lax equations," Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. **86** (1979) 131.

[140] E. Witten, "Sigma models and the ADHM construction of instantons," J. Geom. Phys. **15** (1995) 215 [hep-th/9410052].

[141] E. Witten, "Small instantons in string theory," Nucl. Phys. B **460** (1996) 541 [hep-th/9511030].

[142] M. Wolf, "Soliton antisoliton scattering configurations in a noncommutative sigma model in 2+1 dimensions," JHEP **0206** (2002) 055 [hep-th/0204185].

[143] V. Zakharov, *What is Integrability ?* (Springer, 1991) [ISBN/0387519645].

[144] A. Zuevsky, "Continual Lie algebras and noncommutative counterparts of exactly solvable models," J. Phys. A **37** (2004) 537.